Die Sprache, die Faszination und die Bedeutung der Mathematik

Wolfgang Lück

Juni 2008

Hinweis

- Dies ist keine Vorlesung.
- Dies ist ein interaktiver Vortrag.
- Mitmachen und Mitdenken erwünscht.

Sprache Mathematik

- UISTZWEIPIR
- $$U = 2\pi r$$
- $$U = 2 \cdot \pi \cdot r$$

- Die Formel besagt:

  Der Umfang eines Kreises ist proportional zu seinem Radius, wobei der Proportionalitätsfaktor das Doppelte der Zahl π ist, die ihrerseits gleich dem Flächeninhalt eines Kreises vom Radius 1 ist.

- Die Zahl π hat keine Darstellung als periodische Dezimalzahl.
- $$\pi = 3.14159265358979323846264\ldots$$

- $$1 = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \binom{n+1}{i+1}$$

- Es bedeutet

$$\binom{n+1}{i+1} = \frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-i+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(i+1)}$$

- Zum Beispiel erhält man für $n = 3$

$$\binom{n+1}{i+1} = \begin{cases} 4 & \text{falls } i = 0, \\ 6 & \text{falls } i = 1, \\ 4 & \text{falls } i = 2, \\ 1 & \text{falls } i = 3. \end{cases}$$

- Also besagt die Formel für $n = 3$

$$1 = 4 - 6 + 4 - 1.$$

- Mathematik ist unter anderem eine extrem komplizierte und reichhaltige Sprache.
- Das macht sie einerseits schwer verständlich.
- Andererseits ist das eines ihrer Erfolgsgeheimnisse.

Deutsche Sprache schwere Sprache

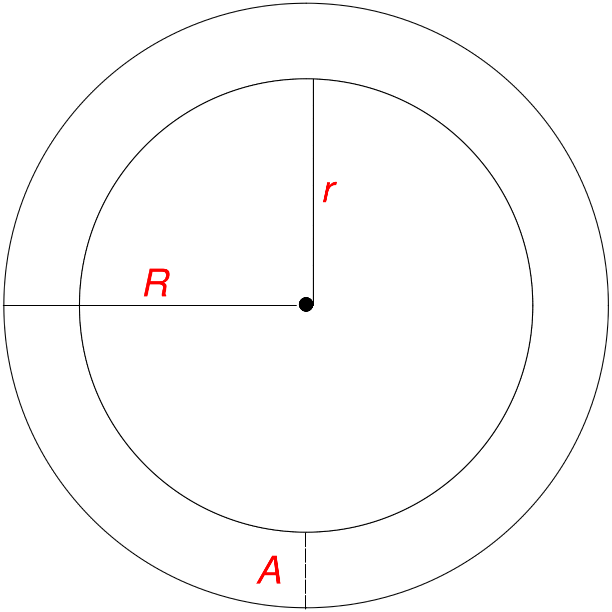
- Mähen Äbte Heu?
- Äbte mähen nie Heu.
- Äbte beten.

Ein Gedankenexperiment

- Stellen Sie sich die Erde als vollkommene Kugel vor.
- Um den Äquator legen wir ein Metallband.
- Die Länge ist etwa 40.000.000 m.
- Wir öffnen das Band und verlängern es um 1m auf 40.000.001 m.
- Danach lassen wir es gleichmäßig vom Äquator abstehen.

- Frage:

  Kann eine Maus unter dem Band herkriechen?


r
R
A

- Sei u bzw. U der Umfang des Bandes vor bzw. nach dem Verlängern. Es gilt

$$U - u = 1m.$$

- Sei r bzw. R der Radius des Kreises, den das Band vor bzw. nach dem Verlängern beschreibt.

- Sei A der Abstand, den das Band nach dem Verlängern von der Erdoberfläche hat. Es gilt

$$A = R - r.$$

- Es gilt

$$\begin{aligned} U &= 2 \cdot \pi \cdot R, \\ u &= 2 \cdot \pi \cdot r. \end{aligned}$$

- Subtrahiert man diese Gleichungen voneinander, erhält man

$$
\begin{aligned}
1m &= U - u \\
&= 2 \cdot \pi \cdot R - 2 \cdot \pi \cdot r \\
&= 2 \cdot \pi \cdot (R - r) \\
&= 2 \cdot \pi \cdot A.
\end{aligned}
$$

- Dividiert man durch $2 \cdot \pi$, so erhält man
$$A = \frac{1m}{2 \cdot \pi} \geq 15cm.$$
- Der Abstand A hängt gar nicht von dem Radius der Kugel ab, mit der wir gestartet sind.
- Die Antwort auf die Frage ist also "Ja".

Postkartengruß (von Sibylle)

Fehlerkorrektur

- Mathematik kann benutzt werden, um effektiv Übertragungsfehler zu korrigieren.
- Wir erläutern dies am sogenannten Hamming Code.
- Aufgabe: Übertrage eine Folge von vier Zeichen, wobei jedes der Zeichen entweder 0 oder 1 ist.
- Zum Beispiel $0, 1, 1, 0$ oder $0, 0, 1, 1$.

- Eine Idee ist, die Übertragung einmal zu wiederholen.
- Gehen wir davon aus, dass insgesamt nur höchstens ein Fehler auftritt.
- Dann weiß der Empfänger, dass bei der Übertagung kein Fehler aufgetreten ist, oder an welcher Stelle der Fehler war.
- Er kann ihn aber nicht korrigieren.

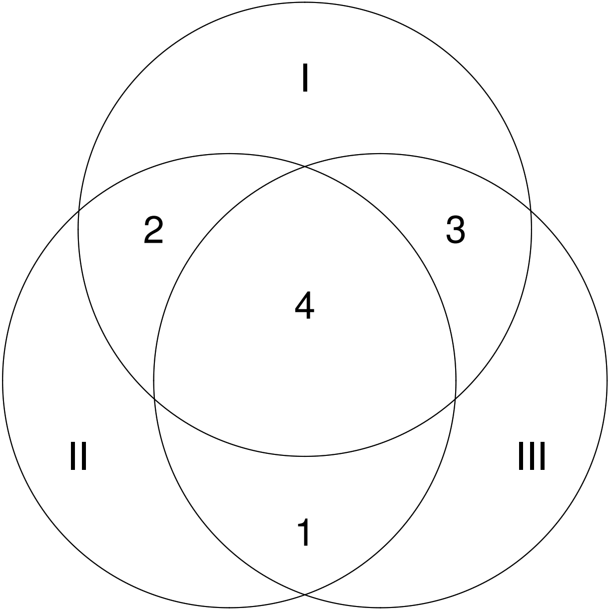
- Empfangen: 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1
- Gesendet: 1, 0, 0, 1
- Empfangen: 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1
- Gesendet: 1, 0, ?, 1
- Empfangen: 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1
- Gesendet: ?, 0, 0, 1

- Eine weitere Idee ist, die Übertragung zweimal zu wiederholen.
- Gehen wir wieder davon aus, dass insgesamt nur höchstens ein Fehler auftritt.
- Dann kann der Übertragungsfehler sogar korrigiert werden.

- Empfangen:
  1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1
- Gesendet: 1, 0, 0, 1
- Empfangen:
  1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1
- Gesendet: 1, 0, 0, 1,
  Fehler an 7. Stelle

- Empfangen:
  $1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1$
- Gesendet: $1, 0, 0, 1$
  Fehler an 5. Stelle

- Diese Methode ist sehr ineffektiv.
- Für die Übertragung von vier Bits werden acht Korrektur-Bits angehängt.
- Der Hamming Code schafft dasselbe Ergebnis, aber mit nur drei Korrektur-Bits.


I
2
3
4
II
III
1

- Trage die vier zu übertragenden Bits an die Stellen 1, 2, 3 und 4 in der obigen Konfiguration ein.
- Dann bestimme die Korrektur-Bits nach folgender Kreisregel:
- Die Summe der Bits in jedem der einzelnen Kreise soll eine gerade Zahl sein.

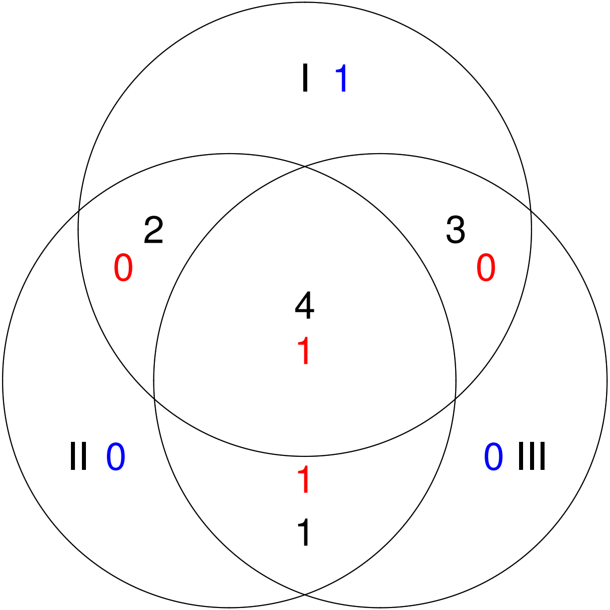
- Übertrage das Wort bestehend aus sieben Bits, nämlich den vier gegebenen Bits und den drei Korrektur-Bits.
- Wir gehen wieder davon aus, dass nur höchstens ein Fehler passiert ist.

- Falls bei dem Empfänger die Kreisregel immer noch erfüllt ist, weiß er, dass kein Fehler aufgetreten ist.

- Falls bei dem Empfänger die Kreisregel nicht mehr für alle Kreise erfüllt ist, kann er das falsch übertragende Bit folgendermaßen bestimmen.

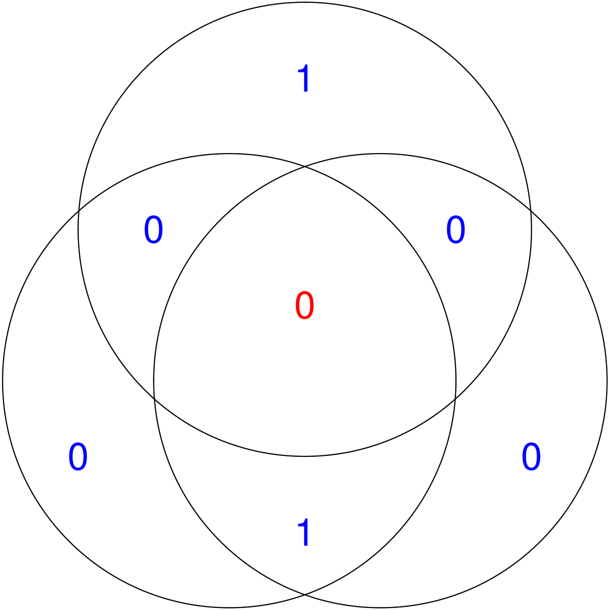
- Das falsch übertragende Bit ist das Bit, das in allen Kreisen liegt, für die die Kreisregel verletzt ist, aber in keinem Kreis, für die die Kreisregel erfüllt ist.

- Beispiel
- Wir wollen $1, 0, 0, 1$ übertragen.
- Die Korrektur-Bits lauten: $1, 0, 0$
- Also wird $1, 0, 0, 1, 1, 0, 0$ gesendet.

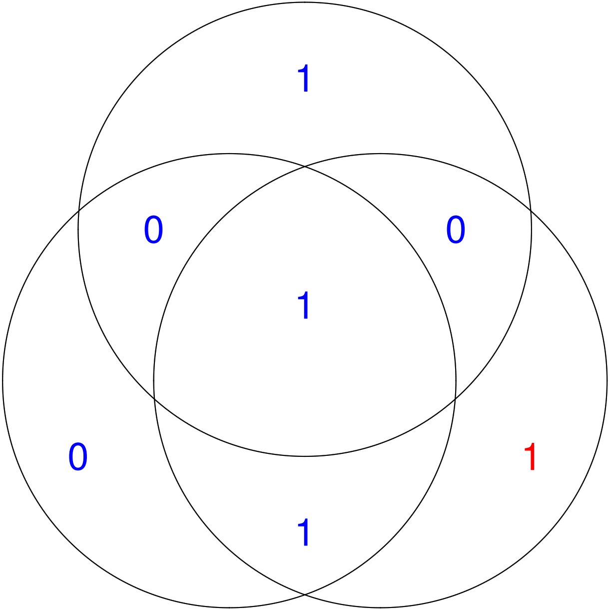


I 1
2
0
3
0
4
1
II 0
0 III
1
1

- Wir gehen wieder davon aus, dass nur höchstens ein Fehler passiert ist.
- Empfangen: $1, 0, 0, 1, 1, 0, 0$
- Kein Fehler
- Empfangen: $1, 0, 0, 0, 1, 0, 0$
- Fehler an 4. Stelle


1
0
0
0
0
0
1

- Empfangen: $1, 0, 0, 1, 1, 0, 1$
- Fehler an 7. Stelle


1
0
0
1
0
1
1

- Die Korrektur von Fehlern bei der Datenübertagung spielt eine zentrale Rolle beispielsweise in der Kommunikation zwischen Satelliten oder bei dem Abspielen einer CD.
- Mathematik macht es überhaupt erst möglich, dass diese Dinge funktionieren.

Eine Demonstration

- Copyright:
  Kreck Enterprise
  at HIM, Bonn

Postkartengruß (von Sibylle)

Kann man Mathematik missbrauchen?

- Die Mathematik selbst ist unschuldig.
- Die Menschen, die sie entwickeln oder benutzen, aber nicht.
- Konkrete Anwendungen, Sponsoren

- Aber auch theoretische Mathematiker, die an den Grundlagen arbeiten, können sich der Verantwortung nicht entziehen.
- Das Potential von Mathematik, die zunächst als reine Grundlagenforschung ohne Anwendungsbezug entwickelt worden ist, ist nicht vorhersehbar.

Ein paar Statistiken zum Mitdenken

- Die folgenden Statistiken sind korrekt.
- Frage: Was ist Ihr spontaner Gedanke?

- Lebenspartner
- Geschiedene Leute haben eine höhere Lebenserwartung.

- Karriere
- Leute in Führungspositionen haben größere Füße.

- Religion
- Mehr als siebzig Prozent aller Verbrecher in Bayern sind katholisch.

Topologen, Donuts und Kaffeetassen

- Häufig zitierte Phrase:
- Ein Topologe ist jemand, der einen Donut nicht von einer Kaffeetasse unterscheiden kann.

- Schon besser:
- Ein Topologe ist jemand, der einen Donut von einer Kaffeetasse unterscheiden kann,
  aber nicht unbedingt will.

- Noch besser:
- Topologen hatten die geniale Einsicht, dass in einem gewissen Sinn das geometrische Gebilde, das ein Donut beschreibt, dasselbe ist wie das geometrische Gebilde, das eine Kaffeetasse beschreibt.

Homöomorphie

- Seien M und N zwei geometrische Gebilde.
- Sie heißen homöomorph, wenn es stetige Abbildungen $f\colon M \longrightarrow N$ und $g\colon N \longrightarrow M$ gibt derart, dass $g \circ f = \mathrm{id}_M$ und $f \circ g = \mathrm{id}_N$ gelten.

- Anschaulich bedeutet dies, dass man durch Ziehen und Zerren ein Gebilde in das andere überführen kann, ohne dass man zwischenzeitlich etwas aufschneidet oder zerreißt und wieder zusammenfügt.

- Eine Kugel vom Radius 1m und eine Kugel vom Radius 1 km sind homöomorph;
- Eine Kugel und ein Würfel sind homöomorph;
- Eine Kaffeetasse und ein Donut sind homöomorph.
- Eine Kugel und ein Donut sind nicht homöomorph.

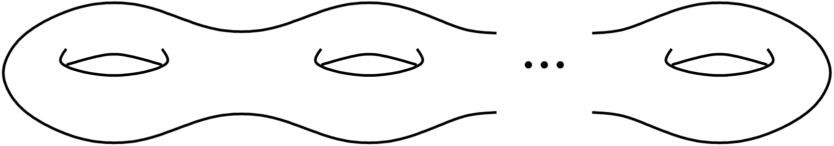
Postkartengruß (von Sibylle)

Flächen

- Eine Fläche ist ein geometrisches geschlossenesTeilgebilde im drei-dimensionalen Raum, das lokal homöomorph zum zwei-dimensionalen Raum ist.
- Jede Fläche ist zu genau einer Standardfläche vom Geschlecht g homöomorph.

- Fläche vom Geschlecht g.

  (Das Geschlecht ist die Anzahl der Löcher).



- Die folgenden Bilder zeigen Objekte, deren Oberfläche eine Fläche beschreibt.
- Frage: Was ist ihr Geschlecht?

Euler-Charakteristik

- Man kann jede Fläche mit Vielecken so überdecken, dass zwei Vielecke sich gar nicht berühren oder ihr Durchschnitt genau aus einer Kante besteht.


© 2001 Winston Mitchell

- Die Euler-Charakteristik χ so einer Überdeckung ist definiert als

$$\chi = E - K + F.$$

- Dabei sind E, K und F die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen.

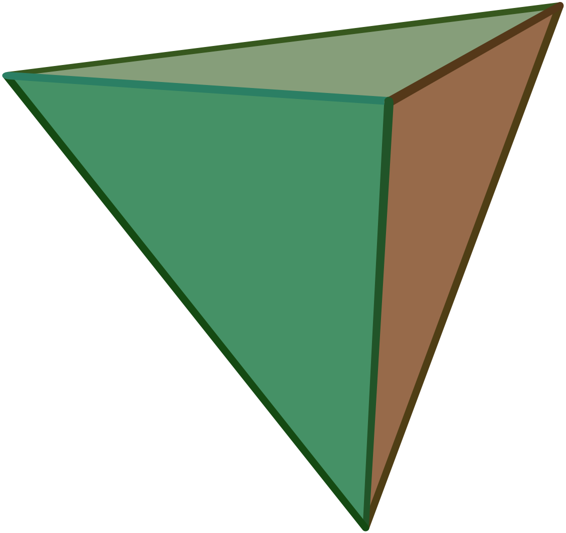
- Die Euler-Charakteristik hängt nicht von der Wahl der Überdeckung ab.
- Zwei Flächen sind genau dann homöomorph, wenn sie dieselbe Euler-Charakteristik haben.
- $$\chi(F_g) = 2 - 2g$$

- Die Euler-Charakteristik der Kugeloberfläche F_0 ist 2.
- Die Euler-Charakteristik der Oberfläche eines Donuts F_1 ist 0.
- Die Euler-Charakteristik der Oberfläche einer Kaffeetasse ist auch 0.

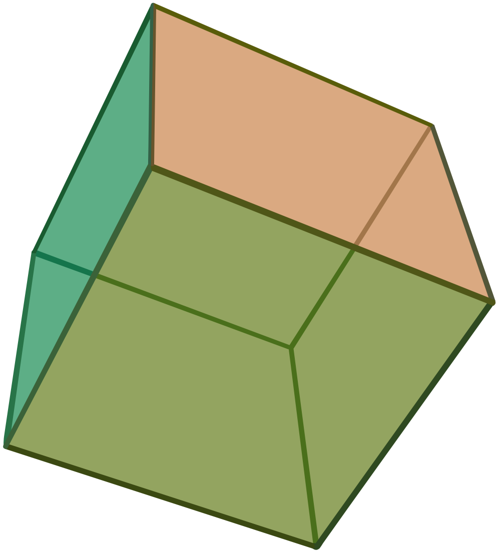
Platonische Körper

- Ein Platonischer Körper ist ein konvexer Körper im Raum, der durch reguläre n-Ecke derart begrenzt wird, dass der Durchschnitt zweier regulärer n-Ecke leer ist oder aus genau einer gemeinsamen Kante besteht und an jeder Ecke genau m Kanten zusammenstoßen.

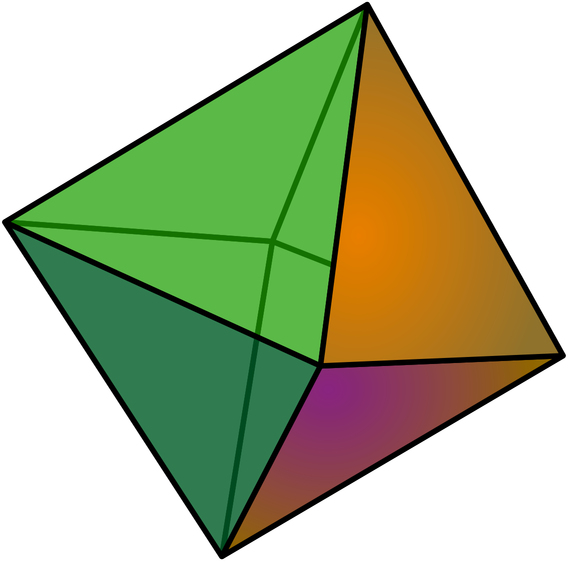
Tetraeder



Hexaeder

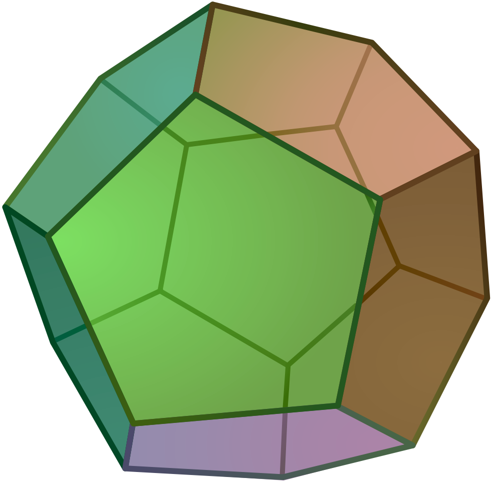


Oktaeder



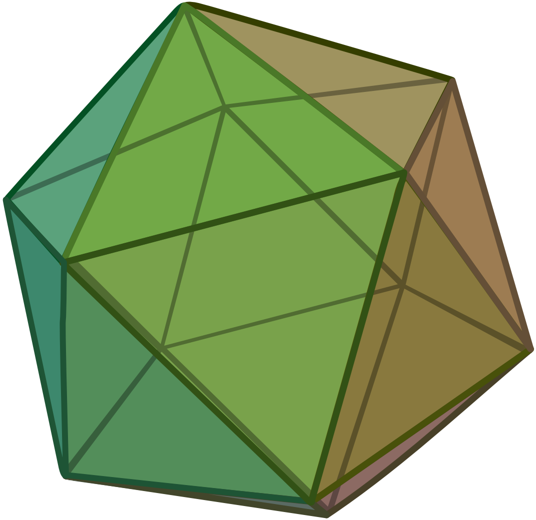
Dodekaeder

POV-Ray-Dodecahedron.svg



Ikosaeder

Icosahedron.svg



- Obwohl es beliebig viele regelmäßige Vielecke gibt, existieren nur fünf regelmäßige Körper:

  Tetraeder,

  Hexaeder (oder Würfel),

  Oktaeder,

  Dodekaeder,

  Ikosaeder.

- Das wollen wir mit Hilfe der Euler-Charakteristik beweisen.
- Die Oberfläche eines Platonischen Körpers ist zu der Kugeloberfläche homöomorph.
- Also gilt

$$E - K + F = 2.$$

- Offensichtlich gilt auch

$$mE = 2K$$

und

$$nF = 2K$$

- Daraus folgt die Gleichung

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{K} + \frac{1}{2}.$$

- Offensichtlich muss $m, n \geq 3$ gelten.

- Aus der letzten Gleichung folgt

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

- Also ist nur möglich

$$\begin{aligned} m = 3 \quad n &= 3; \\ m = 4 \quad n &= 3; \\ m = 3 \quad n &= 4; \\ m = 3 \quad n &= 5; \\ m = 5 \quad n &= 3; \end{aligned}$$

Körper	m	n	E	K	F
Tetraeder	3	3	6	4	4
Hexaeder	3	4	12	8	6
Oktaeder	4	3	12	6	8
Dodekaeder	3	5	30	20	12
Ikosaeder	5	3	30	12	20

Postkartengruß (von Sibylle)

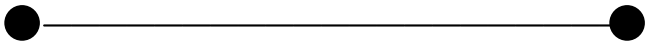
Geometrischer Beweis der Formel $1 = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \binom{n+1}{i+1}$

- Es gibt ein n-dimensionales Gebilde, das n-Simplex Δ_n.

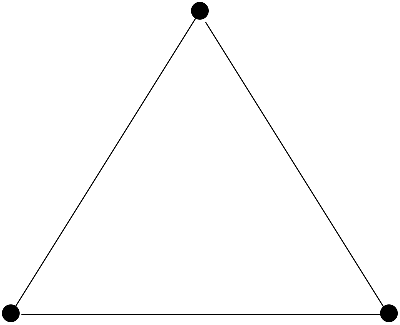
- Es ist die konvexe Hülle der Punkte $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$ $(0, 0, \ldots, 1)$.

- Δ_0 ist ein Punkt.

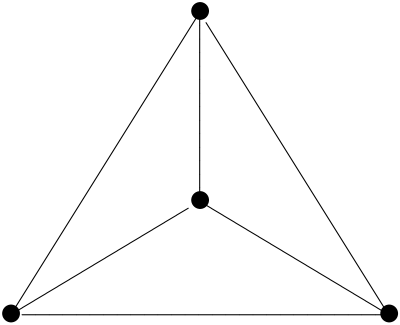
- Δ_1 ist ein Intervall $[0,1]$.



- Δ_2 ist ein Dreieck.



- Δ_3 ist der Tetraeder.



- Man kann auch für Δ_n eine Euler-Charakteristik definieren, indem man die Anzahl der i-dimensionalen Seiten mit wechselnden Vorzeichen zählt.

- Δ_n und Δ_0 sind zwar nicht homöomorph, aber in einem noch schächeren Sinne gleich, nämlich homotopieäquivalent.

- Das impliziert $\chi(\Delta_n) = \chi(\Delta_0) = 1$.
- Das kann man für $n \leq 3$
  an den Bildern überprüfen.
- Die Anzahl der i-dimensionalen
  Seiten in Δ_n ist
  $$\binom{n+1}{i+1}.$$

- Also gilt

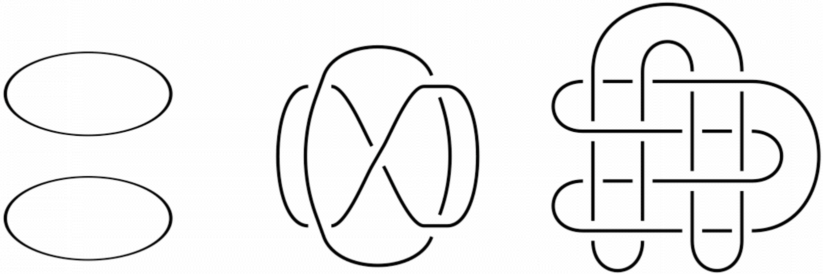
$$1 = \chi(\Delta_0) = \chi(\Delta_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \binom{n+1}{i+1}.$$

- Dies ist ein geometrischer Beweis einer kombinatorischen Formel.

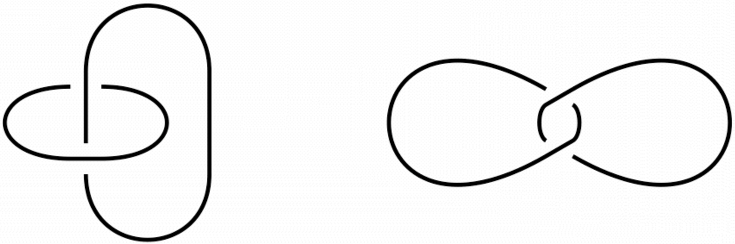
Verschlingungen

- Eine Verschlingung ist eine
  Einbettung von zwei
  Kreislinien in den Raum,
  die sich nicht berühren.

Triviale Verschlingung



Hopf-Verschlingung



- Man kann so einer Verschlingung ein ganze Zahl zu ordnen, die sogenannte Verschlingungszahl.
- Die Verschlingungszahl ist invariant unter Isotopie von Verschlingungen.
- Die Verschlingungszahl $v(K_1, K_2)$ kann man elektrodynamisch interpretieren.

- Es ist bis auf einen Faktor die Arbeit, die man leisten muss, um einen magnetischen Pol entlang des Knotens K_1 zu bewegen, während der Knoten K_2 von einem elektrischen Strom durchflossen wird.

Kartoffeln und Prozentrechnung

- Ein Landwirt hat 100 kg Kartoffeln, die er den Winter über in einer Scheune lagert.
- Anfangs haben die Kartoffeln einen Wassergehalt von 99%.
- Also hat man 1 kg Trockenmasse und 99 kg Wasser.

- Während der Lagerung trocknen sie allerdings.
- Die Trockenmasse bleibt gleich, ein Teil des Wassers verschwindet.
- Zum Winterende beträgt der Wasseranteil nur noch 98 %.

- Frage:

  Wieviele kg Kartoffeln bleiben dem Landwirt?

- Vorschläge:

  100 kg, 99 kg, 98 kg, 97 kg, 90 kg, 50 kg, 1 kg

- Lösung: 50 kg
- Am Winterende macht die Trockenmasse 2% aus.
- Also ist am Winterende das Gesamtgewicht das $100/2 = 50$-Vielfache von der Trockenmasse.

- Die Trockenmasse ist auch am Winterende 1 kg
- Also ist das Gesamtgewicht am Winterende 50 kg.