

Die Sprache, die Faszination
und die Bedeutung der
Mathematik

Wolfgang Lück

November 2008

Hinweis

- ▶ Dies ist keine Vorlesung.
- ▶ Dies ist ein **interaktiver Vortrag**.
- ▶ **Mitmachen** und **Mitdenken** erwünscht.

Sprache Mathematik

- ▶ **UISTZWEIPIR**

- ▶

$$U = 2\pi r$$

- ▶

$$U = 2 \cdot \pi \cdot r$$

- ▶ Die Formel besagt:
Der Umfang eines Kreises ist proportional zu seinem Radius, wobei der Proportionalitätsfaktor das Doppelte der Zahl π ist, die ihrerseits gleich dem Flächeninhalt eines Kreises vom Radius 1 ist.

- ▶ Die Zahl π hat keine Darstellung als periodische Dezimalzahl.
- ▶

$$\pi = 3.14159265358979323846264\dots$$

- ▶ Mathematik ist unter anderem eine extrem komplizierte und reichhaltige Sprache.
- ▶ Das macht sie einerseits schwer verständlich.
- ▶ Andererseits ist das eines ihrer Erfolgsgeheimnisse.

Deutsche Sprache, schwere Sprache

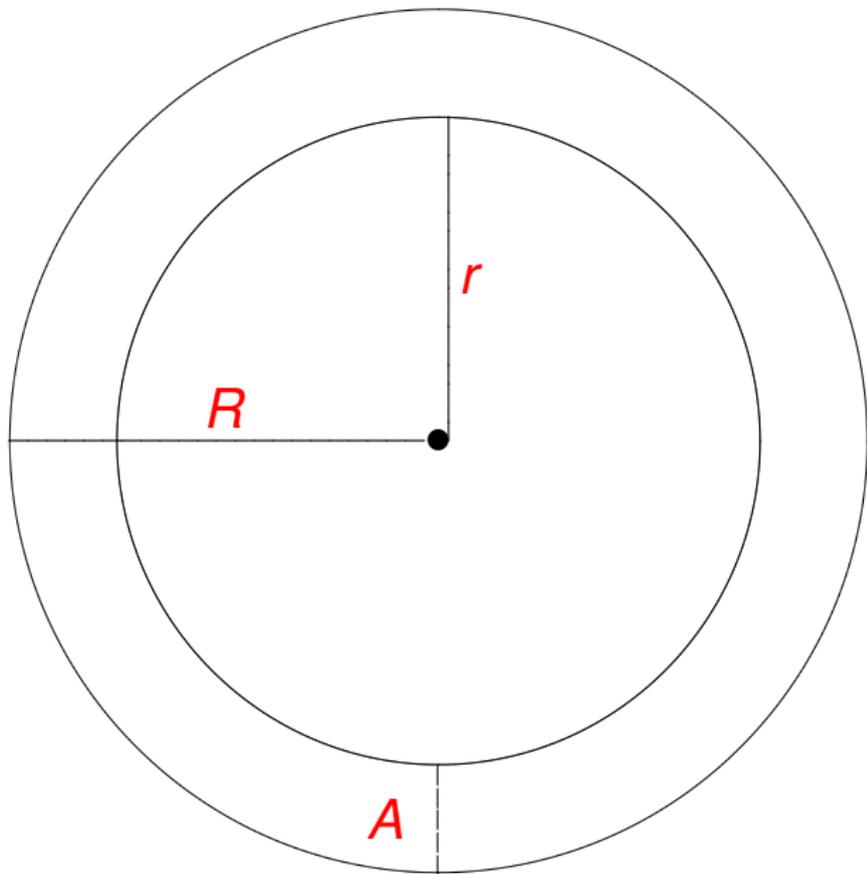
- ▶ Mähen Äbte Heu?
- ▶ Äbte mähen nie Heu.
- ▶ Äbte beten.

Ein Gedankenexperiment

- ▶ Stellen Sie sich die Erde als vollkommene Kugel vor.
- ▶ Um den Äquator legen wir ein Metallband.
- ▶ Die Länge ist etwa 40.000.000 m.
- ▶ Wir öffnen das Band und verlängern es um 1m auf 40.000.001 m.
- ▶ Danach lassen wir es gleichmäßig vom Äquator abstehen.

▶ Frage:

Kann eine Maus unter dem Band herkriechen?



- ▶ Sei u bzw. U der Umfang des Bandes vor bzw. nach dem Verlängern. Es gilt

$$U - u = 1m.$$

- ▶ Sei r bzw. R der Radius des Kreises, den das Band vor bzw. nach dem Verlängern beschreibt.

- ▶ Sei A der Abstand, den das Band nach dem Verlängern von der Erdoberfläche hat. Es gilt

$$A = R - r.$$

- ▶ Es gilt

$$U = 2 \cdot \pi \cdot R,$$

$$u = 2 \cdot \pi \cdot r.$$

- ▶ Subtrahiert man diese Gleichungen voneinander, erhält man

$$\begin{aligned}1m &= U - u \\ &= 2 \cdot \pi \cdot R - 2 \cdot \pi \cdot r \\ &= 2 \cdot \pi \cdot (R - r) \\ &= 2 \cdot \pi \cdot A.\end{aligned}$$

- ▶ Dividiert man durch $2 \cdot \pi$, so erhält man

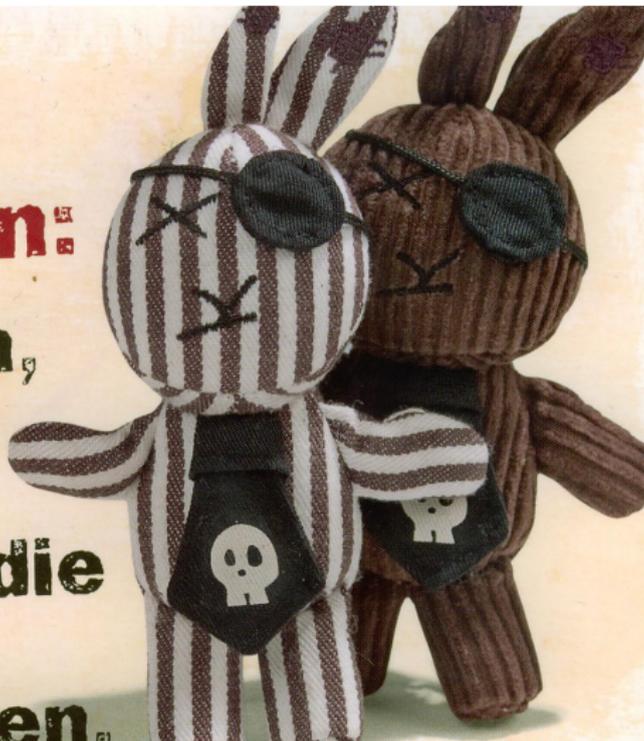
$$A = \frac{1m}{2 \cdot \pi} \geq 15cm.$$

- ▶ Der Abstand A hängt gar nicht von dem Radius der Kugel ab, mit der wir gestartet sind.
- ▶ Die Antwort auf die Frage ist also “Ja”.

Postkartengruß (von Sibylle)

Es gibt
3 Arten
von
Menschen:

Diejenigen,
die zählen
können,
und die, die
es nicht
können.



Kann man Mathematik missbrauchen?

- ▶ Die Mathematik selbst ist unschuldig.
- ▶ Die Menschen, die sie entwickeln oder benutzen, aber nicht.
- ▶ Konkrete Anwendungen, Sponsoren

- ▶ Aber auch theoretische Mathematiker, die an den Grundlagen arbeiten, können sich der Verantwortung nicht entziehen.
- ▶ Das Potential von Mathematik, die zunächst als reine Grundlagenforschung ohne Anwendungsbezug entwickelt worden ist, ist nicht vorhersehbar.

Ein paar Statistiken zum Mitdenken

- ▶ Die folgenden Statistiken sind korrekt.
- ▶ Frage: Was ist Ihr spontaner Gedanke?

- ▶ Lebenspartner
- ▶ Geschiedene Leute haben eine höhere Lebenserwartung.

- ▶ Karriere
- ▶ Leute in Führungspositionen haben größere Füße.

- ▶ Religion
- ▶ Mehr als siebenzig Prozent aller Verbrecher in Bayern sind katholisch.

Postkartengruß (von Sibylle)



Topologen, Donuts und Kaffeetassen

- ▶ Häufig zitierte Phrase:
- ▶ Ein Topologe ist jemand, der einen Donut nicht von einer Kaffeetasse unterscheiden kann.

- ▶ Schon besser:
- ▶ Ein Topologe ist jemand, der einen Donut von einer Kaffeetasse unterscheiden kann, aber nicht unbedingt will.

- ▶ Noch besser:
- ▶ Topologen hatten die geniale Einsicht, dass in einem gewissen Sinn das geometrische Gebilde, das ein Donut beschreibt, dasselbe ist wie das geometrische Gebilde, das eine Kaffeetasse beschreibt.

Homöomorphie

- ▶ Seien M und N zwei geometrische Gebilde.
- ▶ Sie heißen **homöomorph**, wenn es stetige Abbildungen $f: M \rightarrow N$ und $g: N \rightarrow M$ gibt derart, dass $g \circ f = \text{id}_M$ und $f \circ g = \text{id}_N$ gelten.

- ▶ Anschaulich bedeutet dies, dass man durch Ziehen und Zerren ein Gebilde in das andere überführen kann, ohne dass man zwischenzeitlich etwas aufschneidet oder zerreißt und wieder zusammenfügt.

- ▶ Eine Kugel vom Radius 1m und eine Kugel vom Radius 1 km sind homöomorph;
- ▶ Eine Kugel und ein Würfel sind homöomorph;
- ▶ Eine Kaffeetasse und ein Donut sind homöomorph.
- ▶ Eine Kugel und ein Donut sind **nicht** homöomorph.

Postkartengruß (von Sibylle)

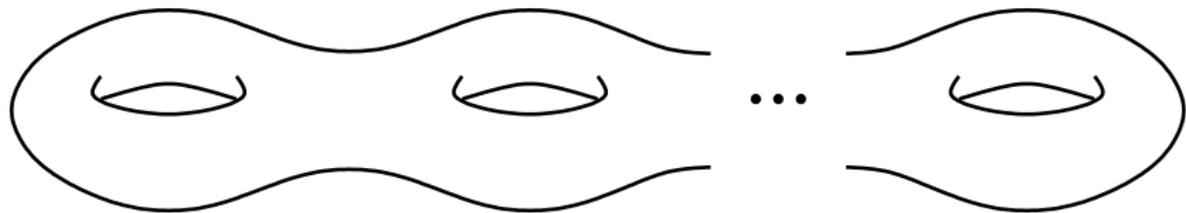


Flächen

- ▶ Eine **Fläche** ist ein geometrisches geschlossenes Teilgebilde im drei-dimensionalen Raum, das lokal homöomorph zum zwei-dimensionalen Raum ist.
- ▶ Jede Fläche ist zu genau einer Standardfläche vom Geschlecht g homöomorph.

► Fläche vom Geschlecht g .

(Das Geschlecht ist die Anzahl der Löcher).



- ▶ Die folgenden Bilder zeigen Objekte, deren Oberfläche eine Fläche beschreibt.
- ▶ Frage: Was ist ihr Geschlecht?

















Euler-Charakteristik

- ▶ Man kann jede Fläche mit Vielecken so überdecken, dass zwei Vielecke sich gar nicht berühren oder ihr Durchschnitt genau aus einer Kante besteht.



© 2001 Winston Mitchell

- ▶ Die **Euler-Charakteristik** χ so einer Überdeckung ist definiert als

$$\chi = E - K + F.$$

- ▶ Dabei sind E , K und F die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen.

- ▶ Die Euler-Charakteristik hängt nicht von der Wahl der Überdeckung ab.
- ▶ Zwei Flächen sind genau dann homöomorph, wenn sie dieselbe Euler-Charakteristik haben.



$$\chi(F_g) = 2 - 2g$$

- ▶ Die Euler-Charakteristik der Kugeloberfläche F_0 ist 2.
- ▶ Die Euler-Charakteristik der Oberfläche eines Donuts F_1 ist 0.
- ▶ Die Euler-Charakteristik der Oberfläche einer Kaffeetasse ist auch 0.

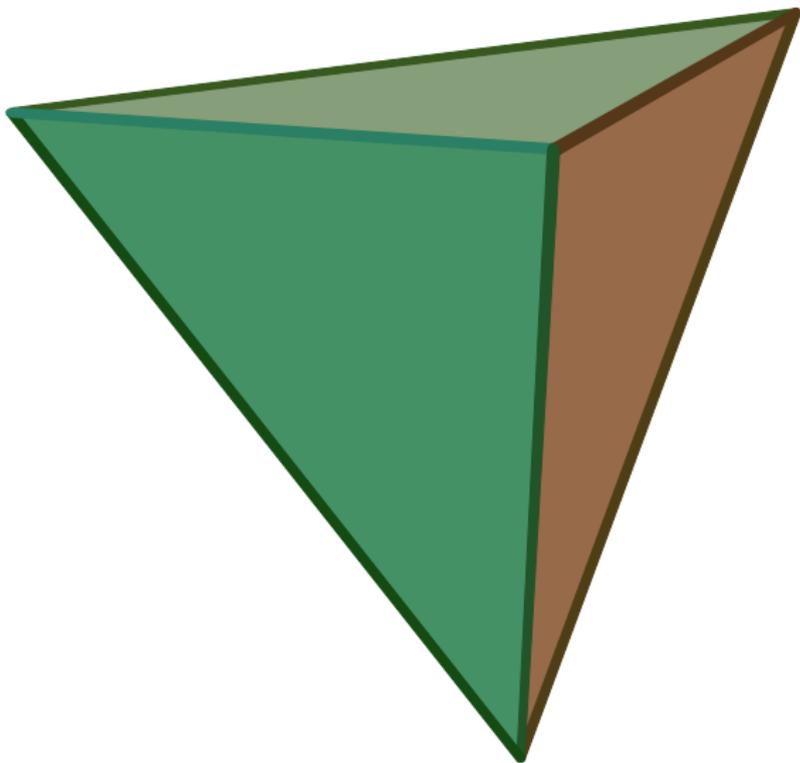
Platonische Körper

- ▶ Ein **Platonischer Körper** ist ein konvexer Körper im Raum, der durch reguläre n -Ecke derart begrenzt wird, dass der Durchschnitt zweier regulärer n -Ecke leer ist oder aus genau einer gemeinsamen Kante besteht und an jeder Ecke genau m Kanten zusammenstoßen.

Tetraeder

Tetrahedron.svg

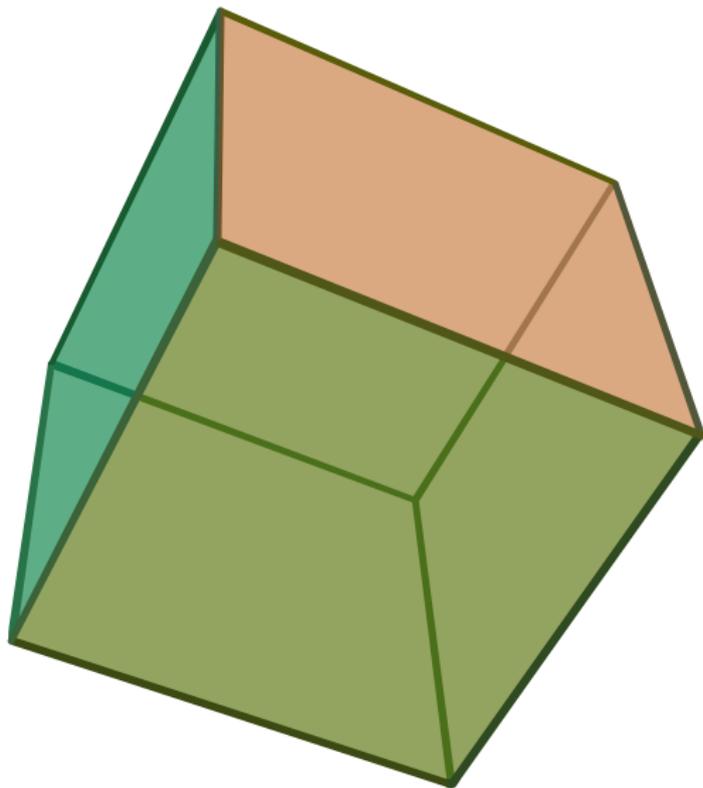
11.06.08 23:45



Hexaeder

Hexahedron.svg

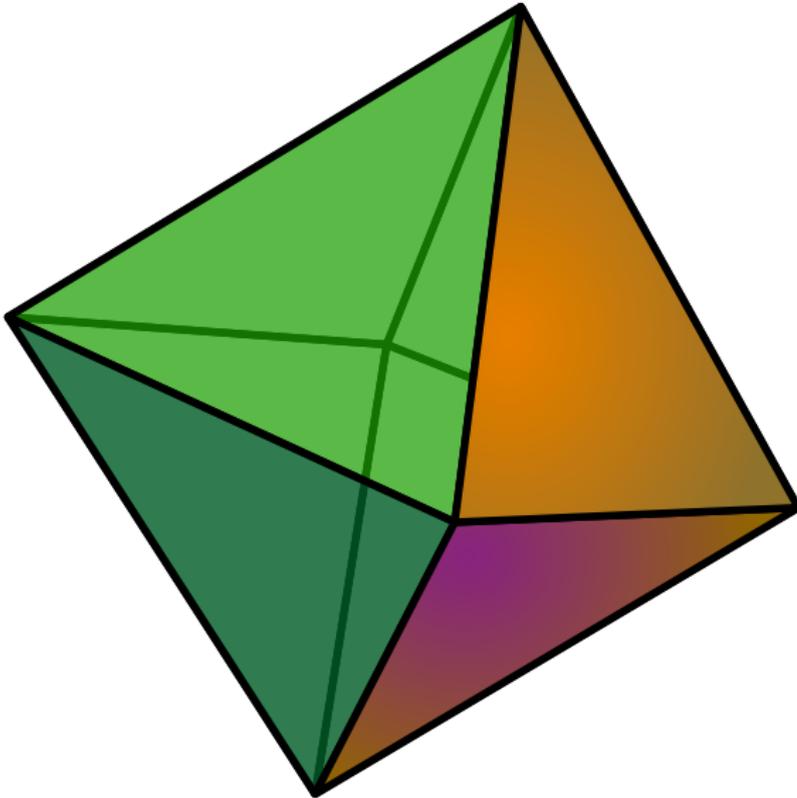
11.06.08 23:58



Oktaeder

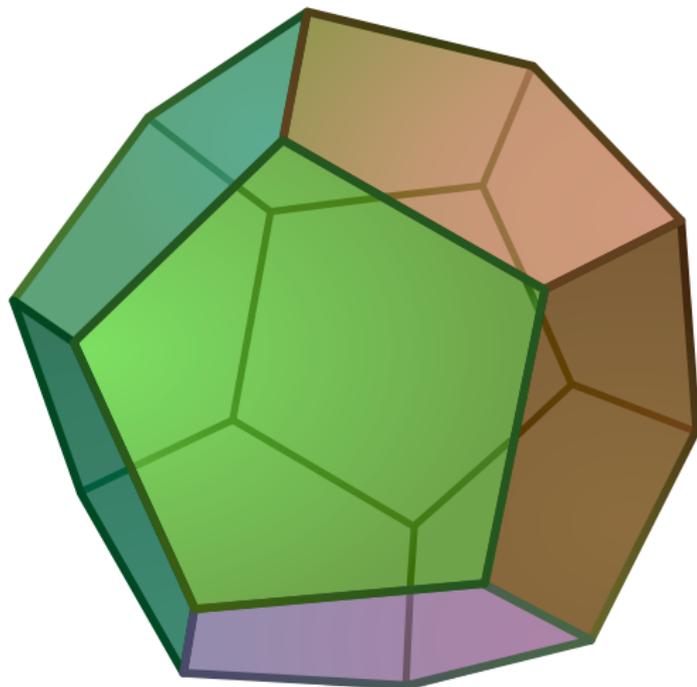
Octahedron.svg

12.06.08 00:00



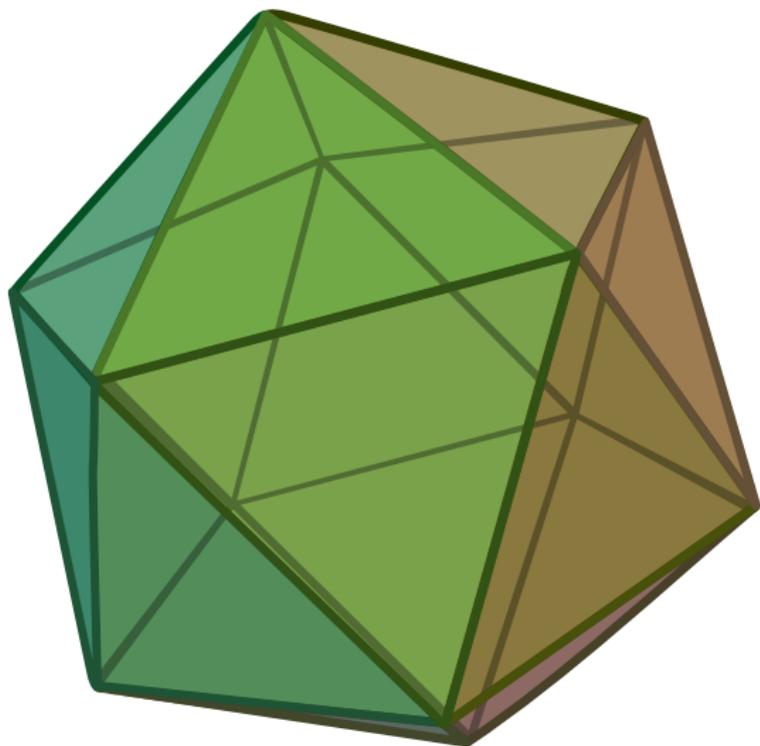
Dodekaeder

POV-Ray-Dodecahedron.svg



Ikosaeder

Icosahedron.svg



- ▶ Obwohl es beliebig viele regelmäßige Vielecke gibt, existieren nur fünf regelmäßige Körper:

Tetraeder,

Hexaeder (oder Würfel),

Oktaeder,

Dodekaeder,

Ikosaeder.

- ▶ Das wollen wir mit Hilfe der Euler-Charakteristik beweisen.
- ▶ Die Oberfläche eines Platonischen Körpers ist zu der Kugeloberfläche homöomorph.
- ▶ Also gilt

$$E - K + F = 2.$$

- ▶ Offensichtlich gilt auch

$$mE = 2K$$

und

$$nF = 2K$$

- ▶ Daraus folgt die Gleichung

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{K} + \frac{1}{2}.$$

- ▶ Offensichtlich muss $m, n \geq 3$ gelten.

- ▶ Aus der letzten Gleichung folgt

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

- ▶ Also ist nur möglich

$$m = 3 \quad n = 3;$$

$$m = 4 \quad n = 3;$$

$$m = 3 \quad n = 4;$$

$$m = 3 \quad n = 5;$$

$$m = 5 \quad n = 3;$$

m	n	E	K	F
3	3	4	6	4
3	4	8	12	6
4	3	6	12	8
3	5	20	30	12
5	3	12	30	20

m	n	E	K	F	Körper
3	3	4	6	4	Tetraeder
3	4	8	12	6	Hexaeder
4	3	6	12	8	Oktaeder
3	5	20	30	12	Dodekaeder
5	3	12	30	20	Ikosaeder

Cartoon-Wettbewerb 2008 der DMV

Christiane Lokar:

Unberechenbar

Du liebst mich doch,
gerade weil ich so
herrlich unberechenbar
bin, stimmt's Schatz?



Christiane Lokar:

Kurvendiskussion

... und was kostet eine Kurvendiskussion?



Christiane Lokar:

Das Ja(hr) der Mathematik



Das JA der Mathematik

Oliver Weiss:

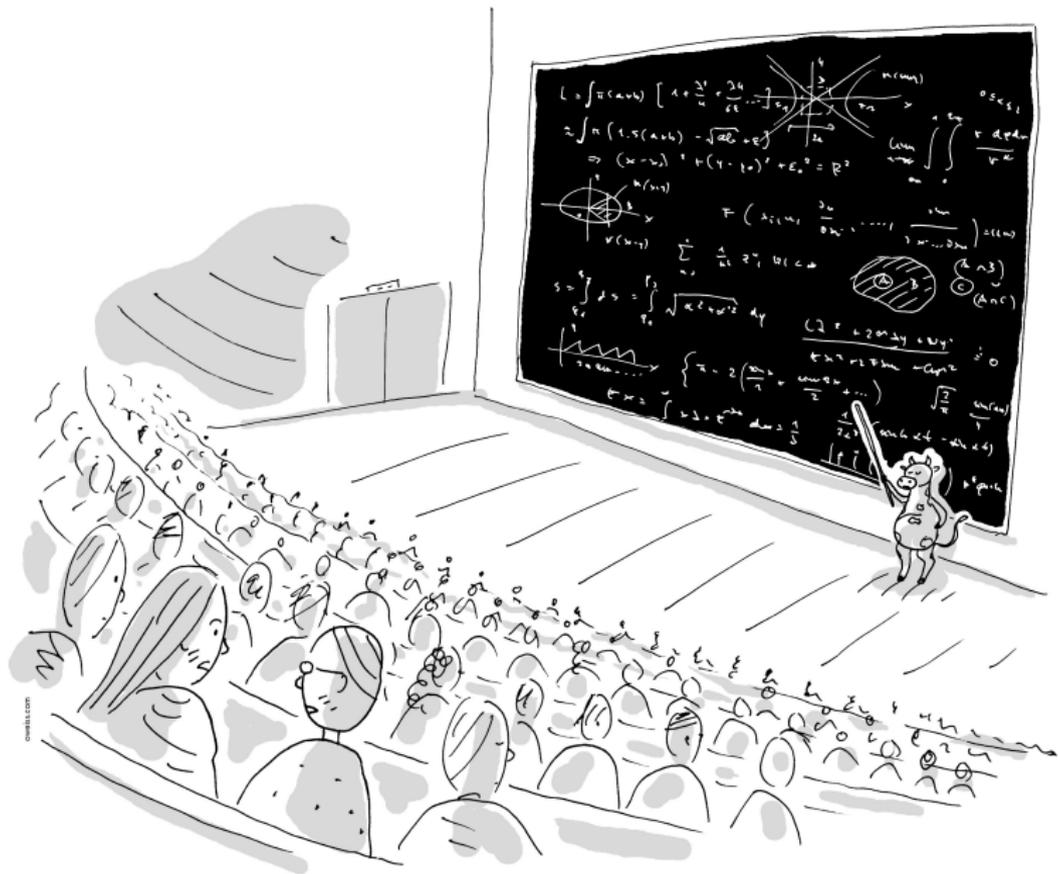
Verrückt

Text:

- ▶ **ZuhörerIn:** Meinst Du nicht, dass das völlig verrückt ist, Anatol?
- ▶ **Zuhörer (Anatol):** Auf alle Fälle. Da müsste bei dem zweiten Integral anstatt ϵ ein ϵ_0 stehen.

Hauptdarsteller





- "So you don't think this is weird at all, Anatol?"
- "Absolutely. There should be an ϵ_0 in the second integral as opposed to an ϵ ."