

Die Sprache, die Faszination  
und die Bedeutung der  
Mathematik

Wolfgang Lück

November 2008

# Hinweis

- ▶ Dies ist keine Vorlesung.
- ▶ Dies ist ein **interaktiver Vortrag**.
- ▶ **Mitmachen** und **Mitdenken** erwünscht.

# Sprache Mathematik

- ▶ **UISTZWEIPIR**

- ▶

$$U = 2\pi r$$

- ▶

$$U = 2 \cdot \pi \cdot r$$

- ▶ Die Formel besagt:  
Der Umfang eines Kreises ist proportional zu seinem Radius, wobei der Proportionalitätsfaktor das Doppelte der Zahl  $\pi$  ist, die ihrerseits gleich dem Flächeninhalt eines Kreises vom Radius 1 ist.



- ▶ Die Zahl  $\pi$  hat keine Darstellung als periodische Dezimalzahl.
- ▶

$$\pi = 3.14159265358979323846264\dots$$

- ▶ Mathematik ist unter anderem eine extrem komplizierte und reichhaltige Sprache.
- ▶ Das macht sie einerseits schwer verständlich.
- ▶ Andererseits ist das eines ihrer Erfolgsgeheimnisse.

# Deutsche Sprache, schwere Sprache

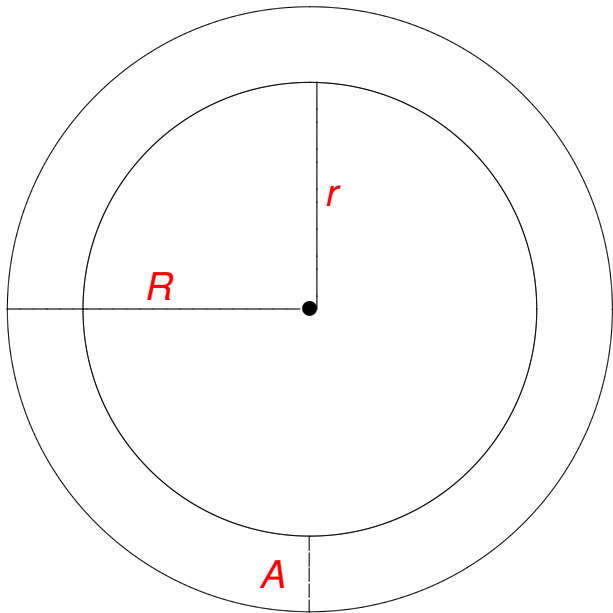
- ▶ Mähen Äbte Heu?
- ▶ Äbte mähen nie Heu.
- ▶ Äbte beten.

# Ein Gedankenexperiment

- ▶ Stellen Sie sich die Erde als vollkommene Kugel vor.
- ▶ Um den Äquator legen wir ein Metallband.
- ▶ Die Länge ist etwa 40.000.000 m.
- ▶ Wir öffnen das Band und verlängern es um 1m auf 40.000.001 m.
- ▶ Danach lassen wir es gleichmäßig vom Äquator abstehen.

▶ Frage:

Kann eine Maus unter dem Band herkriechen?



- ▶ Sei  $u$  bzw.  $U$  der Umfang des Bandes vor bzw. nach dem Verlängern. Es gilt

$$U - u = 1m.$$

- ▶ Sei  $r$  bzw.  $R$  der Radius des Kreises, den das Band vor bzw. nach dem Verlängern beschreibt.

- ▶ Sei  $A$  der Abstand, den das Band nach dem Verlängern von der Erdoberfläche hat. Es gilt

$$A = R - r.$$

- ▶ Es gilt

$$U = 2 \cdot \pi \cdot R,$$

$$u = 2 \cdot \pi \cdot r.$$



- ▶ Subtrahiert man diese Gleichungen voneinander, erhält man

$$\begin{aligned} 1m &= U - u \\ &= 2 \cdot \pi \cdot R - 2 \cdot \pi \cdot r \\ &= 2 \cdot \pi \cdot (R - r) \\ &= 2 \cdot \pi \cdot A. \end{aligned}$$

- ▶ Dividiert man durch  $2 \cdot \pi$ , so erhält man

$$A = \frac{1m}{2 \cdot \pi} \geq 15cm.$$

- ▶ Der Abstand  $A$  hängt gar nicht von dem Radius der Kugel ab, mit der wir gestartet sind.
- ▶ Die Antwort auf die Frage ist also “Ja”.

# Postkartengruß (von Sibylle)

Es gibt  
**3 Arten**  
von  
**Menschen:**

Diejenigen,  
die zählen  
können,  
und die, die  
es nicht  
können.



# Kann man Mathematik missbrauchen?

- ▶ Die Mathematik selbst ist unschuldig.
- ▶ Die Menschen, die sie entwickeln oder benutzen, aber nicht.
- ▶ Konkrete Anwendungen, Sponsoren

- ▶ Aber auch theoretische Mathematiker, die an den Grundlagen arbeiten, können sich der Verantwortung nicht entziehen.
- ▶ Das Potential von Mathematik, die zunächst als reine Grundlagenforschung ohne Anwendungsbezug entwickelt worden ist, ist nicht vorhersehbar.

# Ein paar Statistiken zum Mitdenken

- ▶ Die folgenden Statistiken sind korrekt.
- ▶ Frage: Was ist Ihr spontaner Gedanke?

- ▶ Lebenspartner
- ▶ Geschiedene Leute haben eine höhere Lebenserwartung.

- ▶ Karriere
- ▶ Leute in Führungspositionen haben größere Füße.



- ▶ Religion
- ▶ Mehr als siebenzig Prozent aller Verbrecher in Bayern sind katholisch.

# Postkartengruß (von Sibylle)



# Topologen, Donuts und Kaffeetassen

- ▶ Häufig zitierte Phrase:
- ▶ Ein Topologe ist jemand, der einen Donut nicht von einer Kaffeetasse unterscheiden kann.

- ▶ Schon besser:
- ▶ Ein Topologe ist jemand, der einen Donut von einer Kaffeetasse unterscheiden kann, aber nicht unbedingt will.

- ▶ Noch besser:
- ▶ Topologen hatten die geniale Einsicht, dass in einem gewissen Sinn das geometrische Gebilde, das ein Donut beschreibt, dasselbe ist wie das geometrische Gebilde, das eine Kaffeetasse beschreibt.

# Homöomorphie

- ▶ Seien  $M$  und  $N$  zwei geometrische Gebilde.
- ▶ Sie heißen **homöomorph**, wenn es stetige Abbildungen  $f: M \rightarrow N$  und  $g: N \rightarrow M$  gibt derart, dass  $g \circ f = \text{id}_M$  und  $f \circ g = \text{id}_N$  gelten.

- ▶ Anschaulich bedeutet dies, dass man durch Ziehen und Zerren ein Gebilde in das andere überführen kann, ohne dass man zwischenzeitlich etwas aufschneidet oder zerreißt und wieder zusammenfügt.

- ▶ Eine Kugel vom Radius 1m und eine Kugel vom Radius 1 km sind homöomorph;
- ▶ Eine Kugel und ein Würfel sind homöomorph;
- ▶ Eine Kaffeetasse und ein Donut sind homöomorph.
- ▶ Eine Kugel und ein Donut sind **nicht** homöomorph.



# Postkartengruß (von Sibylle)

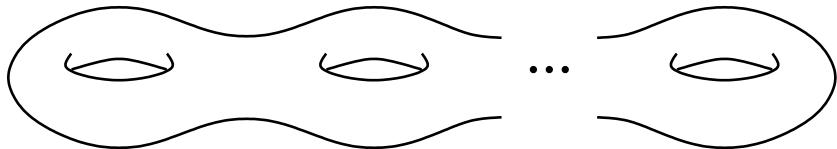


# Flächen

- ▶ Eine **Fläche** ist ein geometrisches geschlossenes Teilgebilde im drei-dimensionalen Raum, das lokal homöomorph zum zwei-dimensionalen Raum ist.
- ▶ Jede Fläche ist zu genau einer Standardfläche vom Geschlecht  $g$  homöomorph.

► Fläche vom Geschlecht  $g$ .

(Das Geschlecht ist die Anzahl der Löcher).



- ▶ Die folgenden Bilder zeigen Objekte, deren Oberfläche eine Fläche beschreibt.
- ▶ Frage: Was ist ihr Geschlecht?



















# Euler-Charakteristik

- ▶ Man kann jede Fläche mit Vielecken so überdecken, dass zwei Vielecke sich gar nicht berühren oder ihr Durchschnitt genau aus einer Kante besteht.



© 2001 Winston Mitchell

- ▶ Die **Euler-Charakteristik**  $\chi$  so einer Überdeckung ist definiert als

$$\chi = E - K + F.$$

- ▶ Dabei sind  $E$ ,  $K$  und  $F$  die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen.

- ▶ Die Euler-Charakteristik hängt nicht von der Wahl der Überdeckung ab.
- ▶ Zwei Flächen sind genau dann homöomorph, wenn sie dieselbe Euler-Charakteristik haben.



$$\chi(F_g) = 2 - 2g$$



- ▶ Die Euler-Charakteristik der Kugeloberfläche  $F_0$  ist 2.
- ▶ Die Euler-Charakteristik der Oberfläche eines Donuts  $F_1$  ist 0.
- ▶ Die Euler-Charakteristik der Oberfläche einer Kaffeetasse ist auch 0.

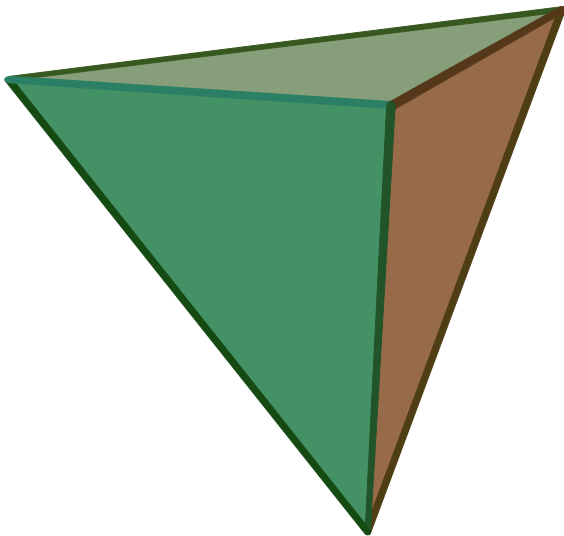
# Platonische Körper

- ▶ Ein **Platonischer Körper** ist ein konvexer Körper im Raum, der durch reguläre  $n$ -Ecke derart begrenzt wird, dass der Durchschnitt zweier regulärer  $n$ -Ecke leer ist oder aus genau einer gemeinsamen Kante besteht und an jeder Ecke genau  $m$  Kanten zusammenstoßen.

# Tetraeder

Tetrahedron.svg

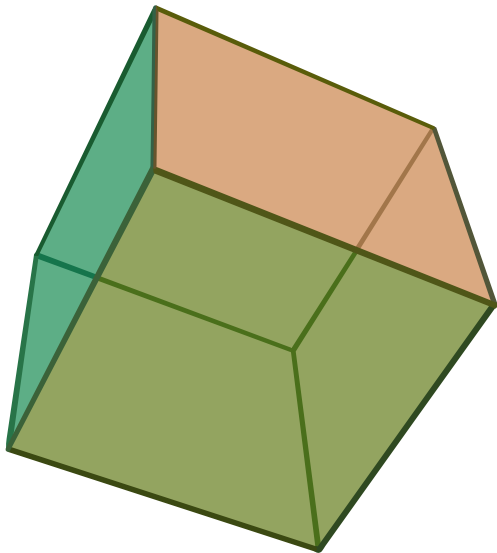
11.06.08 23:45



# Hexaeder

Hexahedron.svg

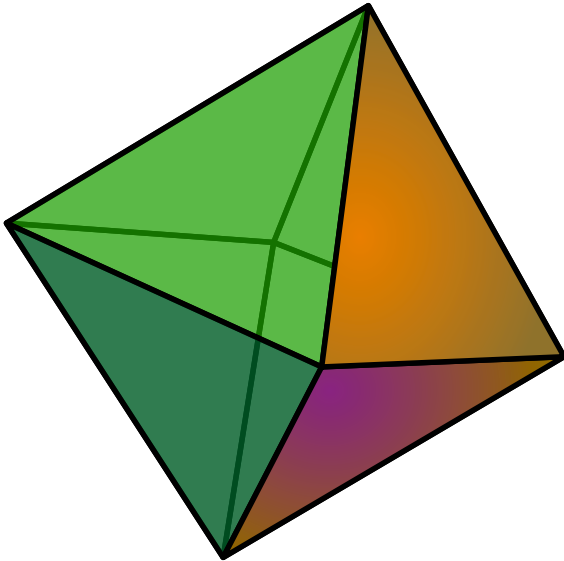
11.06.08 23:58



# Oktaeder

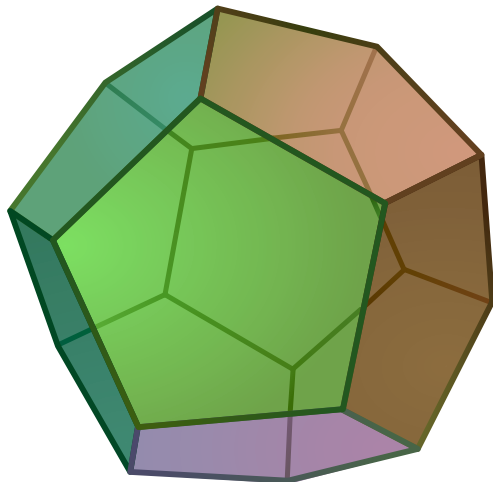
Octahedron.svg

12.06.08 00:00



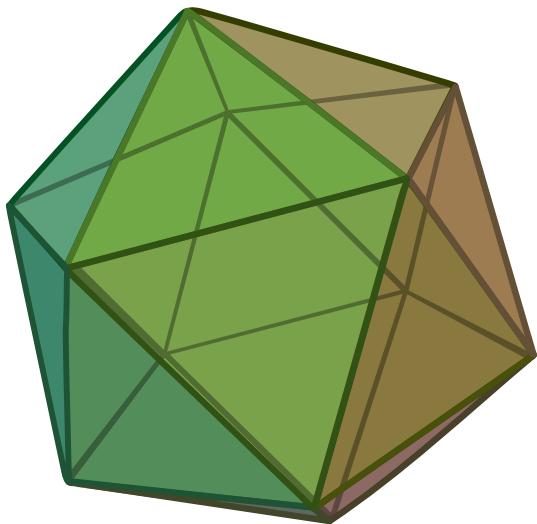
# Dodekaeder

POV-Ray-Dodecahedron.svg



# Ikosaeder

Icosahedron.svg



- ▶ Obwohl es beliebig viele regelmäßige Vielecke gibt, existieren nur fünf regelmäßige Körper:

Tetraeder,

Hexaeder (oder Würfel),

Oktaeder,

Dodekaeder,

Ikosaeder.



- ▶ Das wollen wir mit Hilfe der Euler-Charakteristik beweisen.
- ▶ Die Oberfläche eines Platonischen Körpers ist zu der Kugeloberfläche homöomorph.
- ▶ Also gilt

$$E - K + F = 2.$$

- ▶ Offensichtlich gilt auch

$$mE = 2K$$

und

$$nF = 2K$$

- ▶ Daraus folgt die Gleichung

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{K} + \frac{1}{2}.$$

- ▶ Offensichtlich muss  $m, n \geq 3$  gelten.

- ▶ Aus der letzten Gleichung folgt

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

- ▶ Also ist nur möglich

$$m = 3 \quad n = 3;$$

$$m = 4 \quad n = 3;$$

$$m = 3 \quad n = 4;$$

$$m = 3 \quad n = 5;$$

$$m = 5 \quad n = 3;$$

$m$	$n$	$E$	$K$	$F$
3	3	4	6	4
3	4	8	12	6
4	3	6	12	8
3	5	20	30	12
5	3	12	30	20

$m$	$n$	$E$	$K$	$F$	Körper
3	3	4	6	4	Tetraeder
3	4	8	12	6	Hexaeder
4	3	6	12	8	Oktaeder
3	5	20	30	12	Dodekaeder
5	3	12	30	20	Ikosaeder

# Cartoon-Wettbewerb 2008 der DMV

**Christiane Lokar:**

Unberechenbar

Du liebst mich doch,  
gerade weil ich so  
herrlich unberechenbar  
bin, stimmt's Schatz?



# Christiane Lokar:

## Kurvendiskussion



... und was kostet eine Kurvendiskussion?



Christiane Lokar:

Das Ja(hr) der Mathematik



Das JA der Mathematik

# Oliver Weiss:

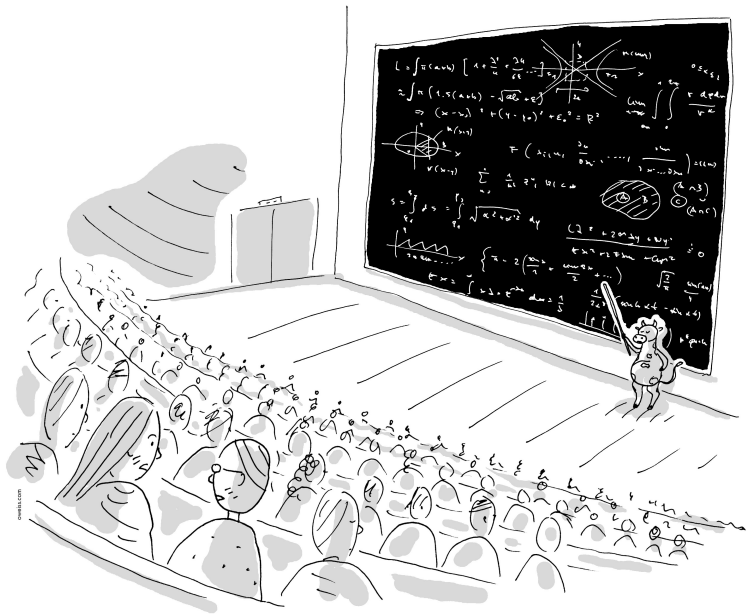
## Verrückt

Text:

- ▶ **ZuhörerIn:** Meinst Du nicht, dass das völlig verrückt ist, Anatol?
- ▶ **Zuhörer (Anatol):** Auf alle Fälle. Da müsste bei dem zweiten Integral anstatt  $\epsilon$  ein  $\epsilon_0$  stehen.

# Hauptdarsteller





- "So you don't think this is weird at all, Anatol?"
- "Absolutely. There should be an  $\epsilon_0$  in the second integral as opposed to an  $\epsilon$ ."