Hyperbolische Gruppen
von
W. Lück
Oberseminar Topologie, Münster, 29.10.03
zuletzt editiert: 29.10.03
zuletzt kompiliert: October 29, 2003

1 Hyperbolische Räume

Eine *Geodäte* in einem metrischen Raum X ist eine isometrische Abbildung $c\colon I \to X$, wobei I ein Intervall in $\mathbb{R}$ ist.

Definition 1.1 (Geodätischer Raum). *Ein* geodätischer Raum *ist ein metrischer Raum, zu dem es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ eine Geodäte $c\colon [0, d(x,y)] \to X$ mit $c(0) = x$ und $c(d(x,y)) = y$ gibt.*

Beispiel 1.2 (Beispiele für geodätische Räume).

- Eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit ist ein geodätischer Raum.
- Sei G ein Graph. Er wird zu einem metrischen Raum durch die Infimumsmetrik bezüglich stückweise linearer Wege, wobei jede Kante durch $[0,1]$ parametrisiert wird.

Sei $\delta \geq 0$ gegeben. Ein geodätisches Dreieck heißt Δ-*dünn*, falls jede Seite in einer δ-Umgebung der Vereinigung der anderen beiden Seiten enthalten ist.

Definition 1.3 (Hyperbolischer Raum). *Ein* δ-hyperbolischer Raum *ist ein geodätischer Raum, in dem alle Dreiecke δ-dünn sind. Ein* hyperbolischer Raum *ist ein Raum, der δ-hyperbolisch für ein $\delta > 0$ ist.*

Beispiel 1.4 (Beispiele für hyperbolische Räume).

- Der 2-dimensionale hyperbolische Raum $\mathbb{H}^2$ ist hyperbolisch.

  Der Satz von Gauß-Bonnet liefert für ein geodätisches Dreick Δ,

  $$\text{Fläche}(\Delta) \;=\; \pi - \alpha - \beta - \gamma.$$

  Also ist die Fläche jedes in Δ enthaltenen Halbkreises durch π beschränkt. Die Fläche eines Kreises vom (hyperbolischen) Radius r in $\mathbb{H}^2$ ist $2\pi \cosh(r) - 1)$ und geht für $r \to \infty$ gegen ∞.
- Eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit negativer Schnittkrümmung ist hyperbolisch.

- Ein CAT(κ)-Raum für $\kappa < 0$ ist hyperbolisch.

  Sei M_κ die (bis auf Isometrie eindeutige) einfach zusammenhängende vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung mit Wert $\kappa \le 0$. Sei X ein metrischer Raum. Zu jedem geodätischen Dreick Δ in X gibt es ein Vergleichsdreieck $\overline{\Delta} \subseteq M_\kappa$. Es erfüllt Δ die CAT(κ)-Bedingung, falls für alle $x, y \in \Delta$ mit Vergleichspunkten $\overline{x}, \overline{y} \in \overline{\Delta}$ die Ungleichung $d(x, y) \le d(\overline{x}, \overline{y})$ gilt. Falls alle Δ dies erfüllen, heißt X ein CAT(κ)-Raum. (Es wird nicht gefordert, dass X vollständig ist). Jede Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $\le \kappa$ ist ein CAT(κ)-Raum.

- $\mathbb{R}^n$ hat Schnittkrümmung konstant 0 und ist nicht hyperbolisch.

- Ein eigentlicher kokompakter CAT(0)-Raum ist genau dann hyperbolisch, wenn er keine zu $\mathbb{R}^2$ isometrischen Unterraum enthält. (Kokompakt heißt, dass es eine kompakte Teilmenge $K \subseteq X$ mit $X = \cup\{\gamma(K) \mid \gamma\colon X \to X \text{ Isometrie}\}$ gibt. Eigentlich heißt, dass jeder abgeschlossene Ball kompakt ist.)

- Jeder Baum is 0-hyperbolisch

  Ein geodätischer Raum ist genau dann 0-hyperbolisch, wenn er ein $\mathbb{R}$-Baum ist. **Comment 1**: `Was bedeutet ℝ-Baum?`

- Jeder geodätischer Raum mit endlichem Durchmesser ist hyperbolisch.

Bemerkung 1.5 (CAT(κ) versus hyperbolisch). Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit hat genau dann Schnittkrümmung $\le \kappa$, wenn sie ein CAT(κ)-Raum ist.

Die Bedingung CAT(κ) ist eine lokale Bedingung. Die Bedingung hyperbolischer Raum ist eine Bedingung im Großen, eine lokale Änderung der Metrik zerstört diese Eigenschaft nie, im Gegensatz zur Bedingung CAT(κ).

Die Bedingung CAT(κ) ist viel stärker als die Bedingung "hyperbolisch". Beispielsweise ist jeder CAT(κ)-Raum für $\kappa \le 0$ kontraktibel.

Bemerkung 1.6 (Äquivalente Definitionen von hyperbolisch). Es gibt einige andere äquivalente Charakterisierungen von hyperbolischen Räumen, die nützlich sind und die wir aus Zeitgründen nicht erläutern wollen. Man findet sie unter den Stichworten "fine triangles", "Minsize", "Insize", "Gromov's inner product and the 4-point-condition", "geodesic divergence" and "linear isoperimetric inequality".

Lemma 1.7. *Sei X ein δ-hyperbolischer Raum. Sei $w\colon [a, b] \to X$ ein stetiger rektifizierbarer Weg in X. Sei $l(w)$ die Länge von w. Sei $c\colon [p, q] \to X$ eine Geodäte mit $c(p) = w(a)$ und $c(q) = w(b)$. Dann gilt für alle $x \in c([p, q])$*

$$d(x, w([a, b])) \;\le\; \delta \cdot |\ln_2(l(w))| + 1.$$

Proof. Falls $l(w) \leq 1$, ist Aussage offensichtlich richtig. Sei im Folgenden $l(w) > 1$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei die Parametrisierung von w durch eine zur Bogenlänge proportionale Parametrisierung $w\colon [0,1] \to X$ gegeben. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $l(c) \cdot 2^{-N-1} < 1 \leq l(w) \cdot 2^{-N}$.

Sei $x \in c([p,q])$ gegeben. Wir konstruieren eine Folge von geodätischen Dreiecken Δ_1, Δ_2, …, Δ_{N+1} und Punkte y_1, y_2, …, y_{N+1} wie folgt. Sei Δ_1 ein geodätisches Dreieck mit Ecken $w(0)$, $w(1/2)$ und $w(1)$, wobei die Seite von $w(0)$ nach $w(1)$ durch das Bild von c gegeben sein soll. Wähle y_1 auf der Vereinigung der anderen beiden Seiten von Δ_1 derart, dass $d(x, y_1) \leq \Delta$ gilt. Das ist möglich, da X nach Voraussetzung δ-hyperbolisch ist. Falls y_1 auf der Seite mit Endpunkten $w(0)$ und $w(1/2)$ liegt, definieren wir Δ_2 als ein geodätisches Dreieck mit Ecken $w(0)$, $w(1/4)$ und $w(1/2)$, wobei die Seite von $w(0)$ nach $w(1/2)$ mit der von Δ_1 übereinstimmen soll. Falls y_1 auf der Seite mit Endpunkten $w(1/2)$ und $w(1)$ liegt, definieren wir Δ_2 als ein geodätisches Dreieck mit Ecken $w(1/2)$, $w(3/4)$ und $w(1)$, wobei die Seite von $w(1/2)$ nach $w(1)$ mit der von Δ_1 übereinstimmen soll. In beiden Fällen können wir $y_2 \in \Delta_2 - \Delta_1$ derart wählen, dass $d(y_1, y_2) \leq \delta$ gilt.

Wir iterieren dieses Verfahren, in der $(n+1)$-ten Stufe erhalten wir ein geodätisches Dreieck Δ_{n+1}, das als zwei seiner Ecken Punkte $w(t_n)$ und $w(t'_n)$ und als dritte Ecke $w(t_{n+1})$ für $t_{n+1} = (t_n + t'_n)/2$ hat. Der Punkt y_n liegt auf der Seite von $w(t_n)$ nach $w(t'_n)$, der Punkt y_{n+1} liegt auf eine der beiden anderen Seiten und $d(y_n, y_{n+1}) \leq \delta$. In der letzen N-ten Stufe erhalten wir einen Punkt y_N derart, dass $d(y_N, y) \leq N \cdot \delta$ gilt und y_N auf einem geodätischen Segment der Länge $l(w) \cdot 2^{-N-1}$ mit Endpunkten auf w liegt. Sei y derjenige der beiden Endpunkt, dessen Abstand von y minimal ist. Dann gilt $d(y, y_N) \leq l(w) \cdot 2^{-N-1}$ und $y \in w([0,1])$. Da $l(w) \cdot 2^{-N-1} < 1$ und $2^N \leq l(w)$ gilt, folgt

$$d(x,y) \;\leq\; d(x,y_N) + d(y_N,y) \;\leq\; N \cdot \delta + l(w) \cdot 2^{-N-1} \;\leq \ln_2(l(w)) \cdot \delta + 1.$$

$\square$

Offensichtlich ist obiges Lemma 1.7 falsch in $\mathbb{R}^n$.

2 Quasi-Geodäten

Definition 2.1 (Quasi-Geodäte). *Eine* (λ, ϵ)-Quasi-Geodäte *ist eine (nicht notwendig stetige) Abbildung* $c\colon I \to X$ *für ein Intervall* $I \subseteq \mathbb{R}$ *derart, dass für alle* $t, t' \in I$ *gilt*

$$\frac{1}{\lambda} \cdot |t - t'| - \epsilon \;\leq\; d(c(t), c(t')) \;\leq\; \lambda \cdot |t - t'| + \epsilon.$$

Theorem 2.2 (Stabilität von Quasi-Geodäten). *Für alle reellen Zahlen* $\delta \geq 0$, $\lambda \geq 1$ *und* $\epsilon \geq 0$ *existiert eine Konstante* $R = R(\delta, \lambda, \epsilon)$ *mit folgender Eigenschaft:*

Sei X ein δ-hyperbolischer Raum, $c\colon [a,b] \to X$ eine (λ,ϵ)-Quasi-Geodäte und $\gamma\colon [p,q] \to X$ eine Geodäte mit $\gamma(p) = c(a)$ und $\gamma(q) = c(b)$. Dann gilt für den Hausdorff Abstand der Bilder von c und γ:

$$d_H(c([a,b]), \gamma([p,q])) \;\leq\; R.$$

Der *Hausdorff-Abstand* zweier Teilmengen A und B eines metrischen Raums X ist definiert als

$$d_H(A,B) \;:=\; \inf\{\epsilon \mid A \subseteq U_\epsilon(A) \text{ and } B \subseteq U_\epsilon(B)\}$$

wobei $U_\epsilon(A) = \{x \in X \mid d(x,a) < \epsilon \text{ für ein } a \in A\}$ ist.

Beispiel 2.3 (Logarithmische Spirale). Theorem 2.2 ist nicht richtig für $X = \mathbb{R}^2$. Die logarithmische Spirale

$$s\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t \cdot \cos(\ln(1+t)), t \cdot \sin(\ln(1+t)))$$

ist eine Quasi-Geodäte. Das liegt an folgender Abschätzung für $0 \leq t' \leq t$ und geeignetes $\theta \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
&|t-t'| \;\leq\; d(s(t), s(t')) \\
&\leq\; d(s(t), t'\cdot\cos(\ln(1+t)), t'\cdot\sin(\ln(1+t))) + d(t'\cdot\cos(\ln(1+t)), t'\cdot\sin(\ln(1+t)), s(t')) \\
&\leq\; |t-t'| + 2\pi t' \cdot (\ln(1+t) - \ln(1+t')) \;\leq\; |t-t'| + 2\pi t' \cdot \frac{t-t'}{1+t'+\theta\cdot(t-t')} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \leq |t-t'| + 2\pi \cdot |t-t'| \;\leq\; (2\pi+1)\cdot|t-t'|.
\end{aligned}$$

Sie erfüllt aber offensichtlich nicht die Behauptung in Theorem 2.2.

Korollar 2.4. (Charakterisierung von hyperbolisch durch dünne quasi-geodätische Dreiecke). *Ein geodätischer Raum ist genau dann hyperbolisch, wenn für jedes $\lambda \geq 0$ and $\epsilon \geq 0$ eine Konstante $\mu = \mu(\lambda,\epsilon)$ derart existiert, dass jedes (λ,ϵ)-quasi-geodätisches Dreieck μ-dünn ist.*

Definition 2.5 (Quasi-Isometrie). *Eine (nicht notwendig) stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ von metrischen Räumen heißt* Quasi-Isometrie, *falls es Konstanten $\lambda > 0$, $\epsilon \geq 0$ und $C \geq 0$ mit folgenden Eigenschaften gibt:*

(i) Für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt

$$\frac{1}{\lambda}\cdot d_X(x_1,x_2) - \epsilon \;\leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \;\leq\; \lambda \cdot d_X(x_1,x_2) + \epsilon.$$

(ii) Für alle $y \in Y$ gilt $d_Y(y, f(X)) \leq C$.

Falls $f\colon X \to Y$ eine Quasi-Isometrie ist, so existiert eine Quasi-Isometrie $g\colon Y \to X$ zusammen mit einer Konstanten $K \geq 0$ derart, dass $d_X(g\circ f(x), x) \leq K$ für alle $x \in X$ und $d_Y(f\circ g(y), y) \leq K$ für alle $y \in Y$ gilt. In diesem Fall nennen wir X und Y *quasi-isometrisch.*

Beispiel 2.6 (Quasi-isometrische Räume).

- Endlicher Durchmesser

  Ein metrischer Raum hat genau dann endlichen Durchmesser, wenn er quasi-isometrisch zu $\{\text{pt.}\}$ ist.

- Cayley-Graphen einer Gruppen zu verschiedenen endlichen Erzeugendensystemen sind quasi-isometrisch.

  Dieses Beispiel ist eines der grundlegenden Motivationen des Begriffs der Quasi-Isometrie, mit dessen Hilfe man eine entscheidende Brücke zwischen der Gruppentheorie und der metrischen Geometrie schlagen kann.

- Satz von Milnor und Švarc

  Sei X ein eigentlicher geodätischer Raum. Es operiere G auf X kokompakt und eigentlich. Dann ist G endlich erzeugt und der Cayley Graph von G zu einem beliebigen endlichen Erzeugendensystem ist quasi-isometrisch zu X. Insbesondere gilt für eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit M, das ihre Fundamentalgruppe endlich erzeugt und quasi-isometrisch zur universellen Überlagerung $\widetilde{M}$ ist.

Korollar 2.4 impliziert:

Theorem 2.7 (Hyperbolisch ist invariant unter Quasi-Isometrie). *Seien X und Y geodätische Räume, die quasi-isometrisch sind. Dann ist X genau dann hyperbolisch, wenn Y hyperbolisch ist.*

3 Der Rand eines hyperbolischen Raums

Definition 3.1 (Asymptotische geodätische Strahlen). *Zwei geodätische Strahlen $c_1, c_2 \colon [0, \infty) \to X$ heißen* asymptotisch*, wenn es eine Konstante $C > 0$ derart gibt, dass $d(c_1(t), c_2(t)) \leq C$ für alle $t \in [0, \infty)$ gilt.*

In der Form ist diese Definition für quasi-geodätische Strahlen ungeeignet, weil sie nicht unter linearen Umparametrisierung invariant ist. Zwei geodätische Strahlen sind genau dann asymptotisch, wenn der Hausdorff-Abstand ihrer Bilder endlich ist. Analog definiert man

Definition 3.2 (Asymptotische quasi-geodätische Strahlen). *Zwei quasi-geodätische Strahlen $c_1, c_2 \colon [0, \infty) \to X$ heißen* asymptotisch*, wenn der Hausdorff-Abstand ihrer Bilder endlich ist.*

Definition 3.3 (Rand eines metrischen Raums). *Sei X ein metrischer Raum. Definiere seinen* Rand *∂X als die Menge der Äquivalenzklassen $[c]$ von geodätischen Strahlen unter der Aquivalenzrelation "asymptotisch". Setze $\overline{X} = X \amalg \partial X$. Definiere $\partial_q X$ als die Menge der Äquivalenzklassen $[c]$ von quasi-geodätischen Strahlen unter der Aquivalenzrelation "asymptotisch".*

Lemma 3.4 (Der Rand und quasi-geodätische Strahlen). *Sei X ein eigentlicher geodätischer Raum. Sei X hyperbolisch. Dann gilt:*

(i) Die kanonische Abbildung $\partial X \to \partial_q X$ ist bijektiv.

(ii) Zu jedem $p \in X$ und $\xi \in \partial X$ existiert ein geodätischer Strahl $c\colon [0,\infty) \to X$ mit $[c] = \xi$.

(iii) Zu je zwei verschiedenen Punkten $\xi, \eta \in \partial X$ existiert eine Geodäte $c\colon (-\infty,\infty) \to X$ derart, dass $c|_{[0,\infty)}$ den Punkt η und $c^-\colon [0,\infty) \to X$, $t \mapsto c(-t)$ den Punkt ξ repräsentiert.

Lemma 3.5 (Asymptotische geodätische Strahlen sind uniform benachbart). *Sei X ein eigentlicher geodätischer Raum, der δ-hyperbolisch ist. Dann sind asymptotische geodätische Strahlen $c_1, c_2\colon [0,\infty) \to X$ uniform benachbart, d.h. es gilt*

(i) Es gibt $T_1, T_2 > 0$ derart, dass für alle $t \in [0,\infty)$ gilt

$$d(c_1(t+T_1), c_2(t+T_2)) \leq 5\delta.$$

(ii) Falls $c_1(0) = c_2(0)$ gilt, so folgt $d(c_1(t), c_2(t)) \leq 2\delta$ für alle $t \in [0,\infty)$.

Als nächstes beschreiben wir eine Topologie auf $\overline{X} = X \amalg \partial X$.

Notation 3.6 (Verallgemeinerte geodätische Strahlen). Ein *verallgemeinerter geodätischer Strahl* ist ein Geodäte $c\colon I \to X$, wobei $I = [0,R]$ für ein $R \geq 0$ oder $I = [0,\infty)$ ist. Im Fall $I = [0,\infty)$ bezeichne $c(\infty) \in \partial X$ die Klasse von c. Im Fall $I = [0,R]$ definiere $c(t) = c(R)$ für $t \in [R,\infty]$. Es ist also

$$\overline{X} = X \amalg \partial X = \{c(\infty) \mid c \text{ verallgemeinerter geodätischer Strahl}\}.$$

Definition 3.7 (Topologie auf ∂X). *Sei X ein eigentlicher hyperbolischer Raum. Wähle einen Basispunkt $p \in X$.*

Eine (abzählbare) Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\overline{X}$ konvergiert gegen $x \in \overline{X}$, falls es verallgemeinerte Strahlen c_n mit $c_n(0) = p$ und $c_n(\infty) = x_n$ mit folgender Eigenschaft gibt: Jede Unterfolge von $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält eine Unterfolge, die uniform auf kompakten Mengen gegen einen verallgemeinerten Strahl c mit $c(\infty) = x$ konvergiert.

Definiere eine Teilmenge $B \subseteq \overline{X}$ als abgeschlossen, wenn für jede (abzählbare) Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in B, die gegen ein $x \in \overline{X}$ konvergiert, das Element x zu B gehört.

Lemma 3.8 (Elementare Eigenschaften der Topologie auf $\overline{X}$). *Sei X ein eigentlicher δ-hyperbolischer Raum.*

(i) Die obige Definition liefert eine wohldefinierte Topologie, die von der Wahl des Basispunktes $p \in X$ unabhängig ist.

(ii) *Sei $k > 2\delta$. Sei $c_0\colon [0,\infty) \to X$ ein geodätischer Strahl mit $c_0(0) = p$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $V_n(c_0(\infty))$ die Menge der verallgemeinerten geodätischen Strahlen c mit $c(0) = p$ und $c(n) = c_0(n)$. Dann ist $\{V_n(c_0(\infty)) \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Fundamentalsystem von (nicht notwendig offenen) Umgebungen von $c_0(\infty)$.*

Theorem 3.9 (Der Rand ist metrisierbar). *Sei X ein eigentlicher hyperbolischer Raum. Dann ist $\overline{X}$ ein kompakter metrisierbarer Raum. Die kanonische Abbildung $x \to \overline{X}$ ist ein Homöonorphismus auf ihr Bild, das eine offene und dichte Teilmenge in X ist.*

Beispiel 3.10 (Rand eines CAT(0)-Raumes). Sei X ein CAT(0)-Raum. Die Definition von ∂X als Menge der Äquivalenzklassen von geodätischen Strahlen macht nach wie vor Sinn. Man kann mit Hilfe der CAT(0)-Eigenschaft eine Topologie, die sogenannte Kegel-Topologie, definieren. Falls X auch noch hyperbolisch ist, stimmt diese Topologie mit der oben konstruierten überein.

Sei M eine einfach zusammenhängende vollständige n-dimensionale Riemmannsche Mannigfaltigkeit mit nicht-negativer Schnittkrümmung. Insbesondere ist M ein CAT(0)-Raum. Die Exponentialabbildung $\exp\colon T_xM \to \mathbb{R}^n$ ist ein Diffeomorphismus, der sich zu einem Homöomorphismus $\overline{\exp}\colon M \amalg \partial M \to D^n = \mathbb{R}^n \amalg S^{n-1}$ fortsetzt. Insbesondere ist $\partial M = S^{n-1}$.

Davis and Januskiewicz haben kontraktible topologische Mannigfaltigkeiten konstruiert, die eine eigentliche CAT(0)-Metrik und eine freie eigentliche kokompakte Operation einer diskreten Gruppe G durch Isometrien besitzen, für die ∂M aber nicht homöomorph zu einer Sphäre ist. Der Quotient $G\backslash M$ ist eine topologische asphärische Mannigfaltigkeit, deren universelle Überlagerung nicht homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist.

Beispiel 3.11 (Die universelle Überlagerung von $S^1 \vee S^1$). Die universelle Überlagerung X von $S^1 \vee S^1$ ist ein Baum mit einer kokompakten freien eigentlichen isometrischen Operation der freien Gruppe $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Man kann ihn auch als den Cayley-Graphen bezüglich des Standard-Erzeugendensystems auffassen. Sein Rand ∂X ist ein Cantor-Teilmenge von S^1.

Theorem 3.12 (Der Rand ist eine Quasi-Isometrie-Invariante). *Sei $f\colon X \to Y$ eine Quasi-Isometrie von hyperbolischen Räumen. Dann induziert sie einen Homöomorphismus $f\colon \partial X \to \partial Y$.*

Insbesondere sind $\mathbf{H}^m$ und $\mathbf{H}^m$ genau dann quasi-isometrisch, wenn $m = n$ gilt.

4 Hyperbolische Gruppen

Definition 4.1 (Hyperbolische Gruppe). *Eine endlich erzeugte Gruppe heißt* hyperbolisch*, wenn ihr Cayley Graph bezüglich eines (und daher aller) symmetrischer endlicher Erzeugendensysteme ein hyperbolischer Raum ist.*

Hier ist eine Liste der wichtigsten Eigenschaften hyperbolischer Gruppen:

- Jede hyperbolische Gruppe ist endlich präsentiert.
- Es gibt nur endlich viele Konjugationsklassen von endlichen Untergruppen in einer hyperbolischen Gruppe.
- Zentralisatoren von unendlichen zyklischen Untergruppen sind virtuell zyklisch.

  Sei $C \subseteq G$ eine unendliche zyklische Untergruppe der hyperbolischen Gruppe G. Dann hat C in ihrem Zentralisator endlichen Index. Insbesondere ist $\mathbb{Z}^2$ keine Untergruppe von G.
- Eine hyperbolische Gruppen ist niemals eine unendliche Torsionsgruppe.
- Sei $\{g_1, g_2 \ldots, g_r\}$ eine endliche Teilmenge der hyperbolischen Gruppe G. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ derart, dass die von $\{g_1^n, g_2^n, \ldots, g_r^n\}$ erzeugte Untergruppe frei ist.
- Hyperbolisch ist äquivalent zur Existenz einer Dehn-Präsentation

  Eine *Dehn-Präsentation* einer Gruppe ist eine endliche Liste von Wörtern u_1, v_1, u_2, v_2, ..., u_n, v_n derart, dass $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, ..., $u_n = v_n$ in G ist, $|v_i| < |u_i|$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ gilt und ein Wort w genau dann das Eins-Element repräsentiert, wenn es eines der u_i als Unterwort enthält. Offensichtlich gibt es dann einen Algorithmus, den *Dehn-Algorithmus*, der entscheidet, ob ein Wort das Eins-Element repräsentiert. Insbesondere ist das Wort-Problem lösbar, wenn eine Gruppe eine Dehn-Präsentation besitzt.
- Das freie Produkt zweier hyperbolischer Gruppen ist wieder hyperbolisch.
- Das Konjugations-Problem ist für eine hyperbolischen Gruppe lösbar.
- Das Isomorphie-Problem ist für torsionsfreie hyperbolische Gruppen lösbar.

  Seien G_1 und G_2 zwei Gruppen, von denen bekannt ist, dass sie torsionsfrei und hyperbolisch sind. Seien jeweils eine Präsentation von G_1 und G_2 gegeben. Dann gibt es einen Algorithmus von Zela, der nach endlicher Zeit entscheidet, ob die Gruppen isomorph sind.
- Rationalität der Wachstumsreihen einer hyperbolischen Gruppe.

  Sei G eine Gruppe mit endlichem symmetrischen Erzeugendensystem S. Sei $\alpha_{G;S}(n)$ bzw. $\beta_{G,S}(n)$ die Anzahl der Elemente in G mit $d_S(g) = n$ bzw. $d_S(g) \leq n$. Definiere formale Potenzreihen

$$\begin{aligned} \zeta_{G,S}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{G,S}(n) \cdot t^n; \\ f_{G,S}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{G,S}(n) \cdot t^n. \end{aligned}$$

Es gilt $\zeta_{G,S}(t) = (1-t) \cdot f_{G,S}(t)$. Falls G hyperbolisch ist, sind beide formale Potenzreihen rational.

- Der Rand einer hyperbolischen Gruppe ist eine Sphäre oder wild

  Sei G eine unendliche hyperbolische Gruppe. Sei ∂G der Rand ihres Cayley-Graphen für irgendein symmetrisches endliches Erzeugendensystems. Falls ∂G eine offene Teilmenge enthält, die homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist, so ist ∂G homöomorph zu S^{n-1}.

- Charakterisierung von virtuell Fuchsschen Gruppen

  Sei G hyperbolisch. Dann ist ∂G genau dann homöomorph zu S^1, wenn G virtuell eine Fuchssche Gruppe ist.

- Virtuelle kohomologische Dimension

  Sei G eine virtuell torsionsfreie hyperbolische Gruppe. Dann ist die virtuelle Dimension von G gleich der Summe der Hausdorff-Dimension von ∂G und Eins.

5 Der Rips-Komplex

Definition 5.1 (Rips Komplex). *Sei X ein metrischer Raum und $R > 0$. Der* Rips Komplex *ist die geometrische Realisierung der simplizialen Menge, deren n-Simplices aus $(n+1)$-dimensionalen Teilmengen von einem Durchmesser $\leq R$ besteht.*

Theorem 5.2 (Der Rips-Komplex ist kontraktibel). *Sei X ein δ-hyperbolischer Raum. Sei $Y \subseteq X$ eine r-dichte Menge, d.h zu $x \in X$ gibt es $y \in Y$ mit $d_X(x,y) \leq r$. Dann ist der Rips-Komplex $P_d(Y)$ kontraktibel, falls $d \geq 4\delta + 6r$ gilt.*

Theorem 5.3 (Der Rips -Komplex ist ein endliches Model für $\underline{E}G$). *Sei G eine hyperbolische Gruppe. Fasse G als metrischen Raum bezüglich der Wort-Metrik für ein symmetrisches endliches Erzeugendensystems auf. Dann ist für genügend großes $d > 0$ die baryzentrische Unterteilung des Rips-Komplexes $P_d(G)$ ein endliches G-CW-Modell für $\underline{E}G$.*

Korollar 5.4 (Weitere Eigenschaften hyperbolischer Gruppen). *Sei G eine hyperbolische Gruppe. Dann gilt:*

(i) BG ist vom endlichen Typ.

(ii) Falls G torsionfrei ist, ist BG endlich.

(iii) Falls G virtuell torsionsfrei ist, dann ist die virtuelle kohomologische Dimension endlich.

(iv) $H_p(G;\mathbb{Q})$ and $H^p(G;\mathbb{Q})$ sind für alle p endlich erzeugte $\mathbb{Q}$-Moduln und verschwinden für hinreichend große p.

6 Offene Fragen

- Ist jede hyperbolische Gruppe residuell endlich?
- Ist jede hyperbolische Gruppe virtuell torsionsfrei?

References

[1] J. M. Alonso and et al. Notes on word hyperbolic groups. In *Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste, 1990)*, pages 3–63. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1991. Edited by H. Short.

[2] M. Bestvina and G. Mess. The boundary of negatively curved groups. *J. Amer. Math. Soc.*, 4(3):469–481, 1991.

[3] B. H. Bowditch. Notes on Gromov's hyperbolicity criterion for path-metric spaces. In *Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste, 1990)*, pages 64–167. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1991.

[4] M. R. Bridson and A. Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature.* Springer-Verlag, Berlin, 1999. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 319.

[5] É. Ghys and P. de la Harpe, editors. *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov.* Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1990. Papers from the Swiss Seminar on Hyperbolic Groups held in Bern, 1988.

[6] M. Gromov. Hyperbolic groups. In *Essays in group theory*, pages 75–263. Springer-Verlag, New York, 1987.

[7] I. Kapovich and N. Benakli. Boundaries of hyperbolic groups. In *Combinatorial and geometric group theory (New York, 2000/Hoboken, NJ, 2001)*, volume 296 of *Contemp. Math.*, pages 39–93. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[8] D. Meintrup and T. Schick. A model for the universal space for proper actions of a hyperbolic group. *New York J. Math.*, 8:1–7 (electronic), 2002.