Homologie und Mannigfaltigkeiten

von

Wolfgang Lück

Adresse:

Wolfgang Lück
Institut für Mathematik und Informatik
Westfälische Wilhelms-Universtität
Einsteinstr. 62, 48149 Münster, Germany
lueck@math.uni-muenster.de
http://wwwmath.uni-muenster.de/math/u/lueck
Fax: 49 251 8338370

Einleitung

Dieses Buch behandelt und verbindet zwei Themen, (Ko-)Homologie und (Analysis auf) Mannigfaltigkeiten.

In den ersten acht Kapiteln wird der Begriff der Homologie und Kohomologie studiert. Homologie wird axiomatisch im Kapitel 1 eingeführt und die singuläre Homologie in Kapitel 2 konstruiert. Im Kapitel 3 werden CW-Komplexe definiert und beschrieben, wie man mit Hilfe des zellulären Kettenkomplexes Homologie berechnen kann. Die Euler-Charakteristik und die Lefschetz-Zahl, die nach Ansicht des Autors besonders schöne elementare Invarianten der algebraischen Topologie sind, werden im Kapitel 4 vorgestellt. Nachdem im Kapitel 5 Kohomologie eingeführt worden ist, werden in Kapitel 6 Grundlagen der homologischen Algebra mit universellen Koeffiziententheoremen als Ziel und im Kapitel 7 Produkte erklärt. In Kapitel 8 wird als Höhepunkt die Poincaré-Dualität diskutiert und bewiesen.

In den verbleibenden sieben Kapiteln werden glatte Mannigfaltigkeiten und die Analysis auf ihnen behandelt. In Kapitel 9 wird der Begriff einer glatten Mannigfaltigkeit und ihres Tangentialbündels erläutert. Nachdem im Kapitel 10 einige Begriffe aus der linearen Algebra zusammengestellt worden sind, wird in Kapitel 11 die parametrisierte Version davon präsentiert, d.h. Vektorraumbündel werden eingeführt. In Kapitel 12 werden Differentialformen erklärt. Kapitel 13 ist dem Satz von Stokes gewidmet. In Kapitel 14 wird die de Rham-Kohomologie studiert. Im Kapitel 15 wird als Höhepunkt der Satz von de Rham bewiesen, dass die de Rham-Kohomologie und die singuläre Kohomologie mit reellen Koeffizienten isomorph sind. Das liefert einen fundamentalen Zusammenhang zwischen der algebraischen Topologie und der Analysis auf Mannigfaltigkeiten.

In einem Anhang werden kurz einige Grundbegriffe aus der mengentheoretischen Topologie und Kategorientheorie zusammengestellt. Damit wird gewährleistet, dass als Voraussetzungen für das Buch nur die ersten beiden Anfänger-Vorlesungen der Analysis und der linearen Algebra sowie einige Teile der Algebra (Ringe und Moduln) benötigt werden.

Das Buch ist modular geschrieben und kann in verschiedener Weise verwendet werden. Man kann beispielsweise direkt mit Kapitel 9 beginnen und sich als Ziel den Beweis des Satzes von Stokes in Kapitel 13 stecken. Das würde sich im Rahmen einer Vorlesung Analysis III oder IV anbieten. Man kann sich aber auch auf die Kapitel 1 bis 8 konzentrieren und im 5. Semester als eine Einführung in die algebraische Topologie lesen. Eventell kann man noch die Verbindung zu der de Rahm-Kohomologie und dem Satz von de Rahm herstellen, wenn man die Kapitel 9 bis 13 voraussetzt, oder die Kapitel 9 bis 15 im Anschluss im nächsten Semester behandeln. Das Buch ist auch zum Selbststudium geeignet.

Ich möchte mich bei den Mitgliedern der Arbeitsgruppe Topologie, insbesondere bei Markus Meyer und Clara Strohm, für die vielen hilfreichen Verbesserungsvorschläge und Korrekturen bedanken.

Münster, im Oktober 2004 — Wolfgang Lück

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **i**

Inhaltsverzeichnis **ii**

1 Homologie **1**
1.1 Die Axiome einer Homologietheorie 1
1.2 Folgerungen aus den Axiomen 3
1.3 Elementare Berechnungen 10
1.4 Elementare Anwendungen 14
1.5 Aufgaben 17

2 Singuläre Homologie **19**
2.1 Kettenkomplexe 19
2.2 Konstruktion der singulären Homologie 21
2.3 Beweis der Homotopieinvarianz für singuläre Homologie 24
2.4 Beweis der Ausschneidung für singuläre Homologie 27
2.5 Skizze der Konstruktion von Bordismustheorie 30
2.6 Die erste singuläre Homologie und die Fundamentalgruppe 32
2.7 Aufgaben 34

3 CW-Komplexe **35**
3.1 CW-Komplexe 35
3.2 Abbildungen zwischen Sphären und ihre Abbildungsgrade 43
3.3 Der zelluläre Kettenkomplex assoziiert zu einer Homologietheorie . . . 45
3.4 Homologische Berechnungen mit Hilfe des zellulären Kettenkomplexes 50
3.5 Eindeutigkeit der Homologie für CW-Komplexe 56
3.6 Simpliziale Komplexe und simpliziale Homologie 61
3.7 Aufgaben 64

4 Euler-Charakteristik und Lefschetz-Zahlen **66**
4.1 Euler-Charakteristik für endliche Kettenkomplexe 66
4.2 Euler-Charakteristik für endliche CW-Komplexe 68
4.3 Die universelle Eigenschaft der Euler-Charakteristik 70
4.4 Lefschetz-Zahlen für endliche Kettenkomplexe 71
4.5 Lefschetz-Zahlen für endliche CW-Komplexe 74
4.6 Lefschetz-Zahlen und Euler-Charakteristiken auf Mannigfaltigkeiten . 76
4.7 Aufgaben 77

5 Kohomologie **78**
5.1 Die Axiome einer Kohomologietheorie 78
5.2 Singuläre und zelluläre Kohomologie 81
5.3 Die Axiome einer multiplikativen Struktur 83
5.4 Der Kohomologiering projektiver Räume 86
5.5 Das Cup-Produkt für CW-Komplexe 91

5.6 Aufgaben . . . 93

6 Homologische Algebra 95

6.1 Der Fundamentalsatz der homologischen Algebra . . . 95
6.2 Der Tor-Funktor . . . 96
6.3 Der Ext-Funktor . . . 102
6.4 Das universelle Koeffiziententheorem für Homologie . . . 105
6.5 Das universelle Koeffiziententheorem für Kohomologie . . . 107
6.6 Die Künneth-Formel für Homologie . . . 109
6.7 Der Satz von Eilenberg und Zilber . . . 110
6.8 Die Künneth-Formel für Kohomologie . . . 111
6.9 Die Bockstein-Sequenz . . . 112
6.10 Direkte Systeme und direkte Limiten . . . 113
6.11 Inverse Systeme und inverse Limiten . . . 115
6.12 Homologie und Ausschöpfungen . . . 118
6.13 Kohomologie und Ausschöpfungen . . . 119
6.14 Aufgaben . . . 121

7 Produkte 123

7.1 Liste der verschiedenen Produkte . . . 123
7.2 Natürlichkeit . . . 124
7.3 Assoziativität . . . 124
7.4 Kommutativität . . . 124
7.5 Eins-Elemente . . . 124
7.6 Verträglichkeit mit Randoperatoren . . . 125
7.7 Relationen zwischen den Produkten . . . 125
7.8 Konstruktion der Produkte . . . 126
7.9 Die Hopf-Invariante . . . 127
7.10 Der Satz von Borsuk-Ulam . . . 130
7.11 Aufgaben . . . 131

8 Dualität 132

8.1 Orientierung . . . 132
8.2 Der Abbildungsgrad . . . 139
8.3 Kohomologie mit kompaktem Träger . . . 142
8.4 Poincaré-Dualität . . . 144
8.5 Poincaré-Dualität und die Euler-Charakteristik . . . 150
8.6 Schnittformen . . . 151
8.7 Jordanscher Trennungsatz . . . 154
8.8 Aufgaben . . . 156

9 Glatte Mannigfaltigkeiten und ihre Tangentialbündel 158

9.1 Glatte Strukturen . . . 158
9.2 Der Tangentialraum . . . 163
9.3 Vektorraumbündel . . . 170
9.4 Das Tangentialbündel . . . 174
9.5 Aufgaben . . . 175

10 Elementare Lineare Algebra **177**
10.1 Konstruktionen von Vektorräumen 177
10.2 Das Dach-Produkt von alternierenden Multilinearformen 180
10.3 Kanonische Isomorphismen 182
10.4 Determinante und Spur 184
10.5 Skalarprodukte und Orientierungen 185
10.6 Spezielle Basen 186
10.7 Aufgaben 187

11 Parametrisierte Lineare Algebra **190**
11.1 Konstruktionen von Vektorraumbündeln 190
11.2 Riemannsche Metriken und Orientierungen 193
11.3 Orientierungen auf Mannigfaltigkeiten 196
11.4 Aufgaben 201

12 Differentialformen **202**
12.1 Definition einer Differentialform 202
12.2 Das Dach-Produkt von Differentialformen 202
12.3 Die äußere Ableitung 203
12.4 Integration von Differentialformen 208
12.5 Die Volumenform 212
12.6 Aufgaben 213

13 Der Satz von Stokes **215**
13.1 Mannigfaltigkeiten mit Rand 215
13.2 Der Satz von Stokes 219
13.3 Anwendungen des Satzes von Stokes 222
13.4 Aufgaben 227

14 De Rham-Kohomologie **228**
14.1 Definition der de Rham-Kohomologie 228
14.2 Homotopieinvarianz der de Rham-Kohomologie 228
14.3 Die Mayer-Vietoris-Sequenz für die de Rham-Kohomologie 232
14.4 Die multiplikative Struktur auf der de Rham-Kohomologie 234
14.5 Aufgaben 234

15 Der Satz von de Rham **236**
15.1 Glatte singuläre Koketten 236
15.2 Glatte Kohomologietheorien 237
15.3 Die de Rham-Abbildung 240
15.4 Der Beweis des Satzes von de Rham 241
15.5 Verträglichkeit mit den multiplikativen Strukturen 241
15.6 Der Satz von Hodge-de Rham 241
15.7 Aufgaben 243

16 Anhang **244**
16.1 Topologische Räume . . . 244
16.2 Die Teilraumtopologie . . . 245
16.3 Stetige Abbildungen . . . 245
16.4 Kompaktheit . . . 245
16.5 Zusammenhang . . . 246
16.6 Das 2. Abzählbarkeitsaxiom . . . 246
16.7 Die Summe von topologischen Räumen . . . 246
16.8 Das Produkt von topologischen Räumen . . . 247
16.9 Homotopie . . . 247
16.10 Identifizierungen . . . 249
16.11 Kategorien . . . 249
16.12 Funktoren und Transformationen . . . 251
16.13 Aufgaben . . . 252

Literaturverzeichnis **254**

Index **257**

Notation **265**