L^2-Invarianten von Mannigfaltigkeiten und Gruppen
von
Wolfgang Lück

Einführung

Das Ziel dieses Vortrags ist eine kurze Einführung in L^2-Invarianten wie die L^2-Betti-Zahlen und die Diskussion ihrer wichtigsten Eigenschaften und Anwendungen. Es werden außerdem die wichtigsten Vermutungen über diese Invarianten diskutiert und inwieweit sie bewiesen sind. Ausführlichere Übersichtsartikel sind [11], [19] und [23].

1. L^2-Betti-Zahlen für CW-Komplexe von endlichem Typ

Sei X ein CW-Komplex *von endlichem Typ*, d.h. jedes Gerüst von X ist endlich. Sei $\overline{X} \longrightarrow X$ eine reguläre Überlagerung von X mit Γ als Gruppe der Decktransformationen. Der zelluläre Kettenkomplex $C_*(\overline{X})$ von $\overline{X}$ ist ein $\mathbb{Z}\Gamma$-Kettenkomplex, dessen p-ter Kettenmodul endlich erzeugter freier $\mathbb{Z}\Gamma$-Links-Modul ist. Die Menge I_p der p-Zellen in X bestimmt eine $\mathbb{Z}\Gamma$-Basis von $C_p(\overline{X})$, die bis auf Multiplikation mit Elementen in Γ und Vorzeichen ± 1 eindeutig ist. Insbesondere ist der Rang von $C_p(\overline{X})$ gleich der Anzahl der p-Zellen in $\overline{X}$. Definiere den *L^2-Kettenkomplex* von $\overline{X}$ als

$$C_*^{(2)}(\overline{X}) \quad := \quad l^2(\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}\Gamma} C_*(\overline{X}). \tag{1.1}$$

Dies ist ein Kettenkomplex von Hilbert-Räumen mit isometrischer Γ-Links-Operation und Γ-äquivarianten beschränkten Operatoren als Differentiale $c_p^{(2)}$

$$\ldots \xrightarrow{c_{p+1}^{(2)}} C_p^{(2)}(\overline{X}) = \oplus_{I_p} l^2(\Gamma) \xrightarrow{c_p^{(2)}} C_{p-1}^{(2)}(\overline{X}) = \oplus_{I_{p-1}} l^2(\Gamma) \xrightarrow{c_{p-1}^{(2)}} \ldots.$$

Definiere die L^2-*Homologie* von $\overline{X}$ als

$$H_p^{(2)}(\overline{X}) \ := \ \ker(c_p^{(2)})/\operatorname{clos}(\operatorname{im}(c_{p+1}^{(2)})). \tag{1.2}$$

Man beachte, daß nicht das Bild, sondern der Abschluß des Bildes des $(p+1)$-ten Differentials herausgekürzt wird. Damit wird erreicht, daß die L^2-Homologie selbst wieder ein Hilbert-Raum mit isometrischer Γ-Operation ist. Es gibt sogar für eine geeignete natürliche Zahl n eine Γ-äquivariante orthogonale Projektion $\operatorname{pr} : \oplus_n l^2(\Gamma) \longrightarrow \oplus_n l^2(\Gamma)$, deren Bild Γ-isometrisch isomorph zu $H_p^{(2)}(\overline{X})$ ist. Mit anderen Worten, $H_p^{(2)}(\overline{M})$ ist ein *endlich erzeugter Hilbert-*Γ*-Modul*. Falls man pr als Matrix $(\operatorname{pr}_{i,j})$ von Γ-äquivarianten beschränkten Operatoren $l^2(\Gamma) \longrightarrow l^2(\Gamma)$ auffaßt, definiert man die *p-te L^2-Betti-Zahl* von $\overline{X}$ als

$$b_p^{(2)}(\overline{X}) \ := \ \sum_{i=1}^{n} \langle \operatorname{pr}_{i,i}(e), e\rangle_{l^2(\Gamma)} \qquad \in \mathbb{R}^{\geq 0}, \tag{1.3}$$

wobei $e \in l^2(\Gamma)$ durch das Einselement in Γ gegeben ist. Man nennt diese Zahl auch die *von-Neumann-Dimension* des endlich erzeugten Hilbert-Γ-Moduls $H_p^{(2)}(\overline{M})$. Sie ist genau dann trivial, wenn $H_p^{(2)}(\overline{M})$ trivial ist. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Projektion pr und hängt nur von der Γ-Isometrieklasse von $H_p^{(2)}(\overline{X})$ ab.

Das folgende Theorem stellt die wichtigsten Eigenschaften dieser Invarianten zusammen.

Theorem 1.4 1. *Homotopieinvarianz*

Seien $\overline{X}$ und $\overline{Y}$ reguläre Überlagerungen der CW-Komplexe X und Y von endlichem Typ mit derselben Gruppe Γ als Gruppe der Decktransformationen. Sei $f : \overline{X} \longrightarrow \overline{Y}$ eine Γ-äquivariante Abbildung, die nach Vergessen der Γ-Operationen eine Homotopieäquivalenz ist. Dann gilt

$$b_p^{(2)}(\overline{X}) \ = \ b_p^{(2)}(\overline{Y}) \qquad \textit{für } 0 \leq p;$$

2. *Euler-Poincaré-Formel*

Sei $\overline{X}$ eine reguläre Überlagerung des endlichen CW-Komplexes X. Dann gilt für die Euler-Charakteristik

$$\chi(X) \ = \ \sum_{p \geq 0} (-1)^p \cdot b_p^{(2)}(\overline{X});$$

3. *Poincaré-Dualität*

   Sei $\overline{M}$ eine reguläre Überlagerung der geschlossenen Mannigfaltigkeit M der Dimension n. Dann gilt

$$b_p^{(2)}(\overline{M}) \ = \ b_{n-p}^{(2)}(\overline{M}) \qquad \text{für } 0 \leq p;$$

4. *Künneth-Formel*

   Seien X und Y CW-Komplexe von endlichem Typ. Seien $\overline{X}$ und $\overline{Y}$ reguläre Überlagerungen von X und Y. Dann ist $\overline{X} \times \overline{Y}$ eine reguläre Überlagerung von $X \times Y$, und es gilt

$$b_n^{(2)}(\overline{X} \times \overline{Y}) \ = \ \sum_{p+q=n} b_p^{(2)}(\overline{X}) \cdot b_q^{(2)}(\overline{Y}) \qquad \text{für } n \geq 0;$$

5. *Morse-Ungleichungen*

   Sei $\overline{X}$ eine reguläre Überlagerung eines CW-Komplexes X von endlichem Typ. Sei $\beta_p(X)$ die Anzahl der p-Zellen von X. Dann gilt

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \cdot b_p^{(2)}(\overline{X}) \ \leq \ \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \cdot \beta_p(X) \qquad \text{für } n \geq 0;$$

6. *L^2-Hodge-deRham-Zerlegung*

   Sei $\overline{M}$ eine reguläre Überlagerung der orientierten geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit M der Dimension n mit Γ als Gruppe der Decktransformationen. Sei $\mathcal{H}^p_{(2)}(\overline{M})$ der Raum der harmonischen glatten L^2-p-Formen auf $\overline{M}$, d.h.. glatte p-Formen ω auf $\overline{M}$ derart, daß $\int_{\overline{M}} \omega \wedge *\omega$ endlich ist und ω im Kern des Laplace-Operators liegt. Dann definiert Integration einen Γ-äquivarianten invertierbaren Operator

$$\mathcal{H}^p_{(2)}(\overline{M}) \longrightarrow H^p_{(2)}(\overline{M});$$

7. *Multiplikativität unter endlichen Überlagerungen*

   Sei X ein CW-Komplex von endlichem Typ und $p : \overline{X} \longrightarrow X$ eine reguläre Überlagerung mit Γ als Gruppe der Decktransformationen. Sei $\Gamma_0 \subset \Gamma$ eine Untergruppe von Γ von endlichem Index n. Wir erhalten eine reguläre Überlagerung $\overline{\overline{X}}$ durch $\overline{X} \longrightarrow \overline{X}/\Gamma_0$. Dann gilt

$$b_p^{(2)}(\overline{\overline{X}}) \ = \ n \cdot b_p^{(2)}(\overline{X}) \qquad \text{für } p \geq 0;$$

8. *L^2-Betti-Zahlen für endliche Gruppen Γ*

   Sei X ein CW-Komplex von endlichem Typ und $p : \overline{X} \longrightarrow X$ eine reguläre Überlagerung mit der endlichen Gruppe Γ als Decktransformationsgruppe. Dann ist $\overline{X}$ ein CW-Komplex von endlichem Typ. Sei $b_p(\overline{X})$ die gewöhnliche p-te Betti-Zahl. Dann gilt

$$b_p^{(2)}(\overline{X}) \;=\; \frac{1}{|\Gamma|} \cdot b_p(\overline{X}) \qquad \text{für } p \geq 0;$$

9. *Nullte L^2-Betti-Zahl*

   Sei X ein zusammenhängender CW-Komplex von endlichem Typ und $p : \overline{X} \longrightarrow X$ eine reguläre Überlagerung mit Γ als Gruppe der Decktransformationen. Dann gilt

$$b_0^{(2)}(\overline{X}) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{|\Gamma|} & \text{falls } |\Gamma| < \infty; \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases}$$

10. *S^1-Operationen und L^2-Betti-Zahlen*

    Sei M eine zusammenhängende kompakte Mannigfaltigkeit mit glatter S^1-Operation. Es sei angenommen, daß für einen Orbit S^1/H (und damit für alle Orbits) die Inklusion des Orbits in M eine Abbildung auf den Fundamentalgruppen mit unendlichem Bild induziert. (Insbesondere hat die S^1-Operation keine Fixpunkte.) Dann gilt für die universelle Überlagerung $\widetilde{M}$

$$b_p^{(2)}(\widetilde{M}) \;=\; 0 \qquad \text{für } p \geq 0.$$

11. *$\Gamma = \mathbb{Z}^n$*

    Sei X ein zusammenhängender CW-Komplex von endlichem Typ und $p : \overline{X} \longrightarrow X$ eine reguläre Überlagerung mit $\mathbb{Z}^n$ als Gruppe der Decktransformationen. Dann gilt

$$b_p^{(2)}(\widetilde{M}) \;=\; \dim_{\mathbb{Z}[\mathbb{Z}^n]_{(0)}} \left(H_p(\overline{X}) \otimes_{\mathbb{Z}[\mathbb{Z}^n]} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}^n]_{(0)} \right). \qquad \blacksquare$$

Die Beweise dieser Aussagen findet man in [5], [14], [18], [20], [22] und [24].

Die L^2-Hodge-deRham-Zerlegung in Theorem 1.4.6 beweist für eine reguläre Überlagerung $\overline{M} \longrightarrow M$ einer geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit die folgende analytische Interpretation. Sei $e^{-t\Delta_p}(\overline{x}, \overline{y})$ der Wärmeleitungskern auf $\overline{M}$. Da $e^{-t\Delta_p}(\overline{x}, \overline{x})$ ein Endomorphismus eines reellen Vektorraums endlicher Dimension ist, ist seine Spur $\mathrm{tr}_{\mathbb{R}}$ definiert. Sei $\mathcal{F}$ ein Fundamentalbereich für die Γ-Operation auf $\overline{M}$. Dann gilt

$$b_p^{(2)}(\overline{M}) \quad = \quad \lim_{t \to \infty} \int_{\mathcal{F}} \mathrm{tr}_{\mathbb{R}} \left(e^{-t\Delta_p}(\overline{x}, \overline{x}) \right) d\overline{x}. \tag{1.5}$$

In dieser Form wurden die L^2-Betti-Zahlen ursprünglich von Atiyah [1] eingeführt.

2. Grundlegende Vermutungen

Die folgenden Vermutungen sind vielleicht die wichtigsten offenen Probleme über L^2-Betti-Zahlen.

Vermutung 2.1 *Sei Γ eine endlich präsentierte Gruppe.*

1. *(Atiyah-Vermutung) Sei M eine zusammenhängende geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit mit universeller Überlagerung $\widetilde{M}$ und Γ als Fundamentalgruppe. Dann ist $b_p^{(2)}(\widetilde{M})$ eine rationale Zahl. Falls die Gruppe Γ torsionsfrei ist, ist sie sogar ganzzahlig.*

2. *Sei $A \in M(m, n, \mathbb{C}\Gamma)$ eine Matrix. Sie induziert einen beschränkten Γ-äquivarianten Operator $l^2(\Gamma)^m \longrightarrow l^2(\Gamma)^n$. Sein Kern ist ein endlich erzeugter Hilbert-Γ-Modul. Dessen von-Neumann-Dimension ist rational und, falls Γ torsionsfrei ist, sogar ganzzahlig.*

3. *(Kaplanski-Vermutung) Der rationale Gruppenring $\mathbb{Q}\Gamma$ ist genau dann nullteilerfrei, wenn Γ torsionsfrei ist;*

4. *(Singer-Vermutung) Die L^2-Betti-Zahlen der universellen Überlagerung einer geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit M der Dimension n mit nicht-positiver Schnittkrümmung verschwinden außerhalb der mittleren Dimension. Falls $n = 2m$ gerade ist, gilt*

$$(-1)^m \cdot \chi(M) \geq 0;$$

5. *(Hopf-Vermutung) Die L^2-Betti-Zahlen der universellen Überlagerung einer geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit M der Dimension n mit negativer Schnittkrümmung verschwinden außerhalb der mittleren Dimension. Falls $n = 2m$ gerade ist, gilt*

$$\begin{aligned} b_m^{(2)}(\widetilde{M}) &> 0; \\ (-1)^m \cdot \chi(M) &> 0. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Die Atiyah-Vermutung wurde von Atiyah [1] zumindest als Frage formuliert. Die ersten beiden Vermutungen sind äquivalent und implizieren die Kaplanski-Vermutung. Die Singer-Vermutung macht auch für asphärische geschlossene Mannigfaltigkeiten Sinn. *Asphärisch* bedeutet, daß die universelle Überlagerung homotopieäquivalent zu einem Punkt ist. Jede Mannigfaltigkeit mit nicht-negativer Schnittkrümmung ist asphärisch. Die zweite Vermutung scheint mit der Isomorphismus-Vermutung in algebraischer K-Theorie von Farrell und Jones [8] und mit der Baum-Connes-Vermutung [2] in Verbindung zu stehen.

3. Übersicht über Sätze, die Spezialfälle der grundlegenden Vermutungen beweisen

Die Klasse der *elementar-amenablen Gruppen* ist die kleinste Klasse von Gruppen, die alle endlichen und alle abelschen Gruppen enthält, abgeschlossen unter Untergruppen, Faktorgruppen und Erweiterungen und abgeschlossen unter gerichteten Vereinigungen ist. Sei $\mathcal{C}$ die kleinste Klasse von Gruppen mit folgenden Eigenschaften: i.) sie enthält alle freien Gruppen, ii.) sie ist abgeschlossen unter gerichteten Vereinigungen, iii.) es gilt $G \in \mathcal{C}$, falls G eine normale Untergruppe H enthält derart, daß H zu $\mathcal{C}$ gehört und G/H elementar-amenabel ist.

Theorem 3.1 (Linnell [12]) *Die Vermutung 2.1.2 ist für Gruppen Γ in der Klasse $\mathcal{C}$ richtig.* $\blacksquare$

Eine irreduzible kompakte orientierbare 3-Mannigfaltigkeit heißt *exzeptionell*, falls es keine endliche Überlagerung gibt, die homotopieäquivalent zu einer Haken-, hyperbolischen oder Seifert-Mannigfaltigkeit ist. Die Geometrisierungs-Vermutung von Thurston oder die Waldhausen-Vermutung implizieren, daß es so ein M nicht gibt.

Theorem 3.2 (Lott and Lück [14]) *Sei M eine kompakte orientierbare 3-Mannigfaltigkeit mit universeller Überlagerung $\widetilde{M}$. Sei $M = M_1 \sharp \ldots \sharp M_r$ die Primzerlegung von M. Es sei vorausgesetzt, daß keiner der Primfaktoren exzeptionell ist. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
b_0^{(2)}(\widetilde{M}) &= 0; \\
b_1^{(2)}(\widetilde{M}) &= (r-1) - \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{\mid \pi_1(M_j) \mid} - \chi(M) + \left|\{C \in \pi_0(\partial M) \mid C \cong S^2\}\right|; \\
b_2^{(2)}(\widetilde{M}) &= (r-1) - \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{\mid \pi_1(M_j) \mid} + \left|\{C \in \pi_0(\partial M) \mid C \cong S^2\}\right|; \\
b_3^{(2)}(\widetilde{M}) &= 0. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Insbesondere beweist dieser Satz die Atiyah-Vermutung und die Singer-Vermutung für 3-Mannigfaltigkeiten M, die den oben erwähnten Bedingungen genügen.

Die Hopf-Vermutung ist von Dodziuk [6] für hyperbolische Mannigfaltigkeiten bewiesen worden.

Theorem 3.3 (Donnelly and Xavier [7]) *Sei M eine geschlossene n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren Schnittkrümmung zwischen -1 und D für eine reelle Zahl D mit $-1 \leq D < -\frac{(n-2)^2}{(n-1)^2}$ liegt. Dann gilt*

$$b_p^{(2)}(\widetilde{M}) = 0 \qquad \text{für } p \neq \frac{n}{2}, \frac{n \pm 1}{2}.$$

Insbesondere folgt für solches M und gerades n die Singer-Vermutung. ■

Theorem 3.4 (Gromov [10]) *Die Hopf-Vermutung ist richtig für Kähler-Mannigfaltigkeiten.* ■

Gromov beweist ein stärkeres Resultat für sogenannte Kähler-hyperbolische Mannigfaltigkeiten. Jede Kähler-Mannigfaltigkeit, die homotopieäquivalent zu einer geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit mit negativer Schnittkrümmung ist, ist Kähler-hyperbolisch.

Sei $l^\infty(\Gamma, \mathbb{R})$ der Raum der beschränkten Funktionen von Γ nach $\mathbb{R}$ mit der Supremumsnorm. Bezeichne 1 die konstante Funktion mit Wert 1. Eine Gruppe Γ heißt *amenabel*, falls es einen Γ-invarianten linearen Operator $\mu : l^\infty(\Gamma, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\mu(1) = 1$ gibt, der

$$\inf\{f(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} \leq \mu(f) \leq \sup\{f(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} \qquad \text{für } f \in l^\infty(\Gamma)$$

erfüllt. Jede elementar-amenable Gruppe ist amenabel.

Theorem 3.5 (Cheeger and Gromov [4]) *Sei X ein asphärischer CW-Komplex von endlichem Typ, dessen Fundamentalgruppe eine nicht-triviale normale amenable Untergruppe enthält. Dann gilt*

$$b_p^{(2)}(\widetilde{X}) \; = \; 0 \qquad \text{für } p \geq 0. \qquad ■$$

Insbesondere beweist dies die Singer-Vermutung für Mannigfaltigkeiten, deren Fundamentalgruppe eine nicht-triviale normale amenable Untergruppe enthält.

4. Weitere Resultate über L^2-Betti-Zahlen

Sei $\overline{X} \longrightarrow X$ eine reguläre Überlagerung eines CW-Komplexes von endlichem Typ mit Γ als Gruppe der Decktransformationen. Wir nehmen an, daß Γ *residuell endlich ist*, d.h. es gibt eine absteigende Folge von normalen Untergruppen $\Gamma = \Gamma_0 \supset \Gamma_1 \supset \ldots \supset \Gamma_m \supset \Gamma_{m+1} \supset \ldots$ derart, daß der Index $[\Gamma : \Gamma_m]$ für alle $m \geq 0$ endlich und der Durchschnitt $\cap_{m \geq 0} \Gamma_m$ die triviale Gruppe ist. Sei $p_m : X_m = \Gamma_m \backslash \overline{X} \longrightarrow X$ die endliche reguläre Überlagerung von X, die zu $\Gamma_m \subset \Gamma$ gehört. Sei $b_p(X_m)$ die gewöhnliche p-te Betti-Zahl von X_m. Folgendes Resultat besagt, daß die L^2-Betti-Zahlen in gewissem Sinne asymptotische Betti-Zahlen sind.

Theorem 4.1 (Lück [17]) *Unter den Bedingungen oben gilt für alle* $p \geq 0$

$$\lim_{m \to \infty} \frac{b_p(X_m)}{[\Gamma : \Gamma_m]} \;=\; b_p^{(2)}(\overline{X}). \qquad \blacksquare$$

Die L^2-Betti-Zahlen von Abbildungstori verschwinden aufgrund des folgenden Resultats.

Theorem 4.2 (Lück [16]) *Sei F ein zusammenhängender CW-Komplex von endlichem Typ und $f : F \longrightarrow F$ eine Selbstabbildung. Sei*

$$\mu : \pi_1(T_f) \xrightarrow{\phi} \Gamma \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}$$

eine Faktorisierung von μ in surjektive Homomorphismen. Sei $\overline{T_f} \longrightarrow T_f$ die reguläre Überlagerung des Abbildungstorus T_f mit Γ als Gruppe der Decktransformationen, die zu ϕ gehört. Dann gilt

$$b_p^{(2)}(\overline{T_f}) = 0 \qquad \textit{für } p \geq 0. \qquad \blacksquare$$

Dieser letzte Satz geht wesentlich in den Beweis des folgenden Satzes ein und zeigt, daß bestimmte Klassen von potentiellen Gegenbeispielen zur Singer-Vermutung keine Gegenbeispiele sein können.

Theorem 4.3 (Lück [18]) *Sei $F \longrightarrow E \xrightarrow{p} B$ eine Faserung von Räumen derart, daß F bzw. E den Homotopietyp eines zusammenhängenden CW-Komplexes mit endlichem 1-Gerüst bzw. 2-Gerüst hat. Falls das Bild des Homomorphismus $\pi_1(F) \longrightarrow \pi_1(E)$ unendlich ist und $\pi_1(B)$ ein Element unendlicher Ordnung enthält, so gilt*

$$b_1^{(2)}(\widetilde{E}) \;=\; 0. \qquad \blacksquare$$

5. Anwendungen auf Gruppen

Der Satz 4.3 impliziert folgendes gruppentheoretisches Resultat. Der *Defekt* $\mathrm{def}(\Gamma)$ einer endlich präsentierten Gruppe Γ ist definiert als das Maximum über die Differenz der Anzahl der Erzeuger und der Anzahl der Relationen aller Präsentationen von Γ.

Theorem 5.1 (Lück [18]) *Sei $1 \longrightarrow \Delta \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \pi \longrightarrow 1$ eine exakte Sequenz von Gruppen derart, daß Δ endlich erzeugt und unendlich ist, Γ endlich präsentiert ist und ein Element unendlicher Ordnung enthält. Dann gilt*

1. $b_1^{(2)}(\Gamma) \;:=\; b_1^{(2)}(E\Gamma) \;=\; 0$;
2. $\mathrm{def}(\Gamma) \leq 1$;
3. *Sei M eine zusammenhängende geschlossene orientierte 4-Mannigfaltigkeit mit Γ als Fundamentalgruppe. Dann gilt für die Signatur $\mathrm{sign}(M)$ und die Euler-Charakteristik $\chi(M)$*

$$|\,\mathrm{sign}(M)| \leq \chi(M). \qquad \blacksquare$$

Thompsons Gruppe F ist die Gruppe der orientierungserhaltenden dyadischen PL-Automorphismen des Einheitsintervalls $[0,1]$, wobei dyadisch bedeutet, daß alle Steigungen ganzzahlige Potenzen von 2 sind und die Bruchstellen in $\mathbb{Z}[1/2]$ liegen. Sie hat die Präsentation

$$F = \langle x_0, x_1, x_2, \ldots \;\mid\; x_i^{-1} x_n x_i = x_{n+1} \text{ für } i < n \rangle.$$

Diese Gruppe ist nicht elementar-amenabel und enthält keine Untergruppe, die frei vom Rang 2 ist. Insofern ist die Frage interessant, ob F amenabel ist, da F je nach Antwort ein Gegenbeispiel zu der Vermutung ist, daß jede endlich präsentierte amenable Gruppe elementar-amenabel ist bzw. jede endlich präsentierte nicht-amenable Gruppe eine freie Untergruppe vom Rang 2 enthält. Da der klassifizierende Raum BF von endlichem Typ ist, kann aufgrund des Satzes 3.5 F nur amenabel sein, wenn alle ihre L^2-Betti-Zahlen verschwinden. Satz 4.2 impliziert

Theorem 5.2 *Die L^2-Betti-Zahlen der Gruppe F sind alle trivial.* ■

Folgender Satz ist eine Konsequenz aus der Euler-Poincaré-Formel aus Satz 1.4.2 und Satz 3.5.

Theorem 5.3 *Sei Γ eine Gruppe, deren klassifizierender Raum $B\Gamma$ ein endlicher CW-Komplex ist und die eine unendliche normale amenable Untergruppe enthält. Dann gilt*

$$\chi(B\Gamma) = 0. \qquad \blacksquare$$

6. Kurzer Überblick über L^2-Torsion

Sei X ein zusammenhängender endlicher CW-Komplex. Wir nehmen an, daß er L^2-azyklisch ist, d.h. die L^2-Betti-Zahlen der universellen Überlagerung sind alle trivial. Unter der technischen Bedingung, daß X von Determinanten-Klasse ist, kann man die L^2-Torsion der universellen Überlagerung definieren durch

$$\rho^{(2)}(\widetilde{X}) \quad \in \quad \mathbb{R}. \tag{6.1}$$

Diese technische Bedingung ist erfüllt, falls die sogenannten Novikov-Shubin-Invarianten von $\widetilde{X}$ alle positiv sind oder die Fundamentalgruppe von X

residuell endlich ist. Vermutlich ist die Bedingung immer erfüllt, und wir werden der Einfachheit halber stillschweigend davon ausgehen, daß X von Determinanten-Klasse ist. Es gibt eine analytische und eine kombinatorische Version der L^2-Torsion, die jeweils die L^2-Version der analytischen Ray-Singer-Torsion und der Reidemeister-Torsion darstellen. Die L^2-Version wurde in [13], [20] und [21] definiert. Die Gleichheit der analytischen und der kombinatorischen Version wurde in [3] bewiesen. Die kombinatorische L^2-Torsion ist eine Invariante des einfachen Homotopietyps und erfüllt eine Summenformel, Faserungsformel, Poincaré-Dualität und ist multiplikativ unter endlichen Überlagerungen [15]. Bei der Summenformel und der Faserungsformel ist zu beachten, daß die Inklusion der Teilräume bzw. der Faser in den Totalraum eine Injektion auf den Fundamentalgruppen induziert. Es gibt einen kombinatorischen Zugang, der es beispielsweise ermöglicht, die L^2-Torsion der universellen Überlagerung $\widetilde{M}$ einer hyperbolischen 3-Mannigfaltigkeit M aus einer Präsentation der Fundamentalgruppe abzulesen, ohne M selbst zu kennen [15]. Das ist insofern interessant, als das Volumen einer geschlossenen hyperbolischen 3-Mannigfaltigkeit bis auf eine Konstante die L^2-Torsion ihrer universellen Überlagerung ist [13], [21]. Für geschlossene asphärische Mannigfaltigkeiten scheint es eine Beziehung zwischen der L^2-Torsion und dem simplizialen Volumen von Gromov [9] zu geben. Es gibt die Vermutung, daß das Verschwinden des simplizialen Volumens für eine orientierte geschlossene Mannigfaltigkeit M das Verschwinden ihrer L^2-Betti-Zahlen und ihrer L^2-Torsion impliziert. Beispielsweise weiß man für eine asphärische geschlossene Mannigfaltigkeit M mit nicht-trivialer S^1-Operation, daß das simpliziale Volumen von M, die L^2-Betti-Zahlen von $\widetilde{M}$ und die L^2-Torsion von $\widetilde{M}$ verschwinden.

Literatur

[1] **Atiyah, M.**: *"Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras"*, Astérisque 32, 43 - 72 (1976)

[2] **Baum, P., Connes, A. and Higson, R.**: *"Classifying space for proper actions and K-theory of group C^*-algebras"*, in "C^*-algebras", editor: Doran, Contemp. Math. 167, 241 - 291 (1994)

[3] **Burghelea, D., Friedlander, L., Kappeler, T. and McDonald, P.**: *"Analytic and Reidemeister torsion for representations in finite type Hilbert modules"*, preprint, to appear in GAFA (1996)

[4] **Cheeger, J. and Gromov, M.**: *"L^2-cohomology and group cohomology"*, Topology 25, 189 - 215 (1986)

[5] **Dodziuk, J.**: *"DeRham-Hodge theory for L^2-cohomology of infinite coverings"*, Topology 16 , 157 - 165 (1977)

[6] **Dodziuk, J.**: *"L^2-harmonic forms on rotationally symmetric Riemannian manifolds"*, Proc. of the AMS 77, 395 - 400 (1979)

[7] **Donnelly, H. and Xavier, F.**: *"On the differential form spectrum of negatively curved Riemannian manifolds"*, Amer. J. Math. 106, 169 - 185 (1984)

[8] **Farrell, F.T. and Jones, L.E.**: *"Isomorphism conjectures in algebraic K-theory"*, J. of the AMS 6, 249 - 298 (1993)

[9] **Gromov, M.**: *"Volume and bounded cohomology"*, Publ. Math. IHES 56, 5 - 100 (1982)

[10] **Gromov, M.**: *"Kähler hyperbolicity and L_2-Hodge theory"*, J. of Diff. Geom. 33, 263 - 292 (1991)

[11] **Gromov, M.**: *"Asymptotic invariants of infinite groups"*, in "Geometric group theory volume 2", Proc. of the Symp. in Sussex 1991, edited by G.A. Niblo and M.A. Roller, Lecture Notes Series 182, Cambridge University Press (1993)

[12] **Linnell, P.**: *"Division rings and group von Neumann algebras"*, Forum Math. 5, 561 - 576 (1993)

[13] **Lott, J.**: *"Heat kernels on covering spaces and topological invariants"*, J. of Diff. Geom. 35, 471 - 510 (1992)

[14] **Lott, J. and Lück, W.**: *"L^2-topological invariants of 3-manifolds"*, Invent. Math. 120, 15 - 60 (1995)

[15] **Lück, W.**: *"L^2-torsion and 3-manifolds"*, Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology Volume III "Low-dimensional topology", Knoxville 1992, editor: Johannson, K., International Press, 75 - 107 (1994)

[16] **Lück, W.**: *"L^2-Betti-numbers of mapping tori and groups"*, Topology 33, 203 - 214 (1994)

[17] **Lück, W.**: *"Approximating L^2-invariants by their finite-dimensional analogues"*, GAFA 4, 455 - 481 (1994)

[18] **Lück, W.**: *"Hilbert modules and modules over finite von Neumann algebras and applications to L^2-invariants"*, preprint, to appear in Math. Annalen (1995)

[19] **Lück, W.**: *"L^2-invariants of regular coverings of compact manifolds and CW-complexes"*, to appear in "handbook of geometry", editors: Davermann, R.J. and Sher, R.B., Elsevier (1997)

[20] **Lück, W. and Rothenberg, M.**: *"Reidemeister torsion and the K-theory of von Neumann algebras"*, K-theory 5, 213 - 264 (1991)

[21] **Mathai, V.**: *"L^2-analytic torsion"*, J. of Funct. Analysis 107, 369 - 386 (1992)

[22] **Novikov, S. and Shubin, M.**: *"Morse inequalities and von Neumann II_1-factors"*, Dokl. Akad. Nauk. 34 no. 1, 289 - 292 (1986), Soviet. Math. Dokl. 34 no. 1, 79 - 82 (1987)

[23] **Pansu, P.**: *"Introduction to L^2-Betti-numbers"*, in "Riemannian Geometry", editors: Lovric, M., Min Oo, M. and Wang, McK. ed., Fields Institute Monographs 4, Amer. Math. Soc., 53 - 86 (1996)

[24] **Zucker, S.**: *"$L_{(2)}$-cohomology of warped products and arithmetic groups"*, Invent. Math. 70, 169 -218 (1982)

Adresse

Wolfgang Lück

Fachbereich für Mathematik und Informatik,

Westfälische Wilhelms-Universität Münster,
Einsteinstr. 62, 48149 Münster, Germany,
email: lueck@math.uni-muenster.de
Fax: 0251 838370
internet: http://wwwmath.uni-muenster.de/math/u/lueck/

Version of 30. April 2003