

Was und wie zählt man im Alltag und in der modernen Mathematik?

Wolfgang Lück (Bonn)

Greifswald
Januar 2014

Hinweis

- ▶ Dies ist keine Vorlesung.
- ▶ Dies ist ein **interaktiver Vortrag**.
- ▶ **Mitmachen** und **Mitdenken** erwünscht.

Ziel

- ▶ Obwohl es um **Mathematik** geht, soll jeder mindestens die Hälfte verstehen und dabei auch noch **Spaß** haben und sich **angeregt** fühlen.

Zählen kann jeder von uns

- ▶ Wieviele Smileys sehen Sie?

1



2



3



4



- ▶ Die Art der Objekte spielt keine Rolle

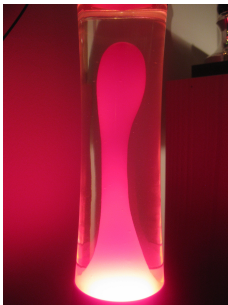
1



2



3



4



- ▶ Die Reihenfolge beim Zählen spielt auch keine Rolle

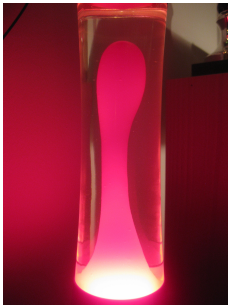
2



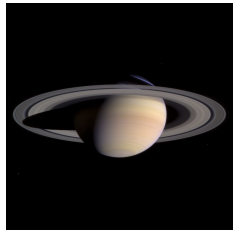
4



1



3



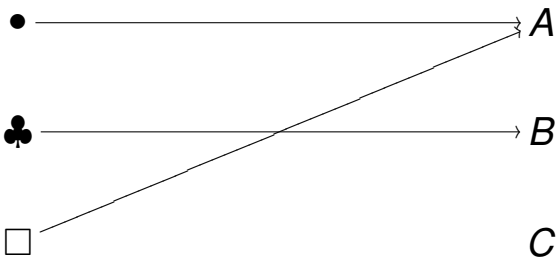
Was ist eigentlich Zählen?

- ▶ **Wikipedia**-Eintrag:
- ▶ Zählen ist eine Handlung zur Ermittlung der Anzahl der Elemente in einer endlichen Menge von gleichwertigen Objekten. Das Zählen erfolgt in Zählritten, oft in Einersritten, wobei die entsprechende Zahlenfolge, als Folge von Zahlwörtern, zum Beispiel eins, zwei, drei oder zwei, vier, sechs, sieben durchlaufen wird. Bei einer aufsteigenden Folge wird vorwärts gezählt, bei einer absteigenden Folge rückwärts.

- ▶ Versuchen wir mal, das etwas genauer zu verstehen.
- ▶ Eine **Menge** ist eine wohlbestimmte Kollektion von Objekten, die man **Elemente** der Menge nennt.
- ▶ Beispiele:
 - ▶ Die Menge alle Leute in diesem Raum.
 - ▶ Die Menge der Leute in diesem Raum, die verheiratet und älter als 40 Jahre sind.
 - ▶ Die Menge aller Menschen auf dem Mars
 - ▶ Die Menge aller Atome im Weltall
 - ▶ Die Menge der natürlichen Zahlen
 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.
 - ▶ Die Menge der rationalen Zahlen \mathbb{Q} .
 - ▶ Die Menge der reellen Zahlen \mathbb{R} .
 - ▶ Die Menge $\{\bullet, \clubsuit, \square\}$.

- ▶ Eine **Abbildung** von Mengen $f: M \rightarrow N$ ist eine Zuordnung, die jedem Element $x \in M$ der Menge M genau ein Element $f(x)$ der Menge N assoziiert.
- ▶ Beispiele
 - ▶ Die Abbildung von der Menge der Leute in diesem Raum in die Menge \mathbb{N} , die jedem Element sein Alter zuordnet.
 - ▶ Die Abbildung von der Menge der Fussballvereine in der Bundesliga in die Menge \mathbb{N} , die jedem Verein seinen Tabellenplatz am Ende der Saison 2012/2013 zuordnet.
 - ▶ Die Abbildung von der Menge der Fussballvereine in der Bundesliga in die Menge $\{1, 2, \dots, 18\}$, die jedem Verein seinen Tabellenplatz am Ende der Saison 2012/2013 zuordnet.

- Die Abbildung $\{\bullet, \clubsuit, \square\} \rightarrow \{A, B, C\}$, die \bullet und \square auf A und \clubsuit auf B abbildet.



- ▶ Die Abbildung $\{\bullet, \clubsuit, \square\} \rightarrow \{A, B, C\}$, die \bullet auf A , \clubsuit auf B und \square auf C abbildet.

$\bullet \longrightarrow A$

$\clubsuit \longrightarrow B$

$\square \longrightarrow C$

- ▶ Die Abbildung $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, die einem Element x seine dritte Potenz x^3 zuordnet.
- ▶ Die Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die einem Element x seine dritte Potenz x^3 zuordnet.

- ▶ Eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ heißt **injektiv**, wenn für zwei Elemente x, y aus M mit $f(x) = f(y)$ bereits $x = y$ folgt.
- ▶ Eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ heißt **surjektiv**, wenn für jedes Element z aus N ein Element x mit $f(x) = z$ existiert.
- ▶ Eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ heißt **bijektiv**, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.
- ▶ Eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ ist genau dann bijektiv, wenn es zu jedem $z \in N$ genau ein $x \in M$ mit $f(x) = z$ gibt.
- ▶ Eine bijektive Abbildung besitzt eine Umkehrabbildung $f^{-1}: N \rightarrow M$.

- ▶ Welche der oben genannten Abbildungen sind injektiv, surjektiv bzw. bijektiv?
- ▶ Die Abbildung von der Menge der Leute in diesem Raum in die Menge \mathbb{N} , die jedem Element sein Alter zuordnet.

Antwort: Weder injektiv noch surjektiv.

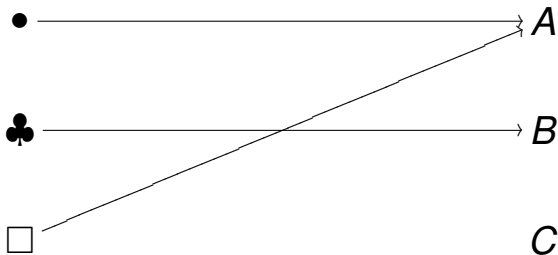
- ▶ Die Abbildung von der Menge der Fussballvereine in der Bundesliga in die Menge \mathbb{N} , die jedem Verein seinen Tabellenplatz am Ende der Saison 2012/2013 zuordnet.

Antwort: injektiv, aber nicht surjektiv.

- ▶ Die Abbildung von der Menge der Fussballvereine in der Bundesliga in die Menge $\{1, 2, \dots, 18\}$, die jedem Verein seinen Tabellenplatz am Ende der Saison 2013/2014 zuordnet.

Antwort: bijektiv.

► Die Abbildung



Antwort: Weder injektiv noch surjektiv.

► Die Abbildung

● \longrightarrow A

♣ \longrightarrow B

□ \longrightarrow C

Antwort: bijektiv

- ▶ Die Abbildung $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, die einem Element x seine dritte Potenz x^3 zuordnet.

Antwort: injektiv, aber nicht surjektiv.

- ▶ Die Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die einem Element x seine dritte Potenz x^3 zuordnet.

Antwort: bijektiv

- ▶ Wir setzen die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \dots\}$ als gegeben voraus.
- ▶ Zwei Mengen M and N heißen **bijektiv**, wenn es eine bijektive Abbildung $f: M \xrightarrow{\cong} N$ gibt.
- ▶ Falls die Mengen M_1 und M_2 und die Mengen M_2 und M_3 bijektiv sind, dann sind auch die Mengen M_1 und M_3 bijektiv.

- ▶ Wir definieren folgende Mengen:

$$[0] = \text{leere Menge } \emptyset;$$

$$[1] = \{1\};$$

$$[2] = \{1, 2\};$$

$$[3] = \{1, 2, 3\};$$

⋮

- ▶ Fakt: Seien $m, n \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann gibt es genau dann eine bijektive Abbildung $f: [m] \xrightarrow{\cong} [n]$, wenn $m = n$ gilt.

- ▶ Eine Menge M heißt **endlich**, wenn sie zu $[n]$ für eine natürliche Zahl n bijektiv ist.
- ▶ Wenn M endlich ist, gibt es genau eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit dieser Eigenschaft.
- ▶ Man nennt $n = |M|$ die **Mächtigkeit** oder die **Anzahl der Elemente** von M .
- ▶ Das Zählen der Elemente einer Menge ist nun einfach die Angabe einer Bijektion $[n] \rightarrow M$.

▶ Früheres Beispiel:

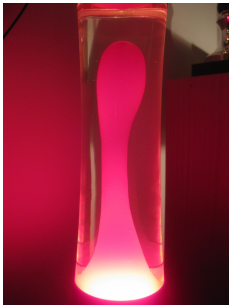
1



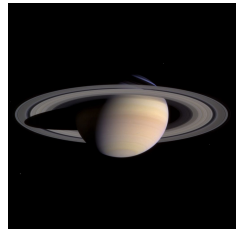
2



3



4



- ▶ Das ist die Angabe einer Bijektion

$$[4] = \{1, 2, 3, 4\} \xrightarrow{\cong} \{\text{😊}, \spadesuit, \text{👗}, \text{🪐}\}$$



Unendliche Mengen

- ▶ Nicht alle Mengen sind endlich, z.B. \mathbb{Q} und \mathbb{R} sind unendlich.
- ▶ Man nennt zwei Mengen **gleichmächtig**, wenn sie bijektiv sind.
- ▶ Eine Menge heißt **abzählbar**, wenn sie bijektiv zu \mathbb{N} ist.
- ▶ \mathbb{Q} ist abzählbar, \mathbb{R} ist nicht abzählbar.

Macht der Zahlen

- ▶ Unbestritten ist das Zählen eine unverzichtbare Fähigkeit für Mitglieder unserer Gesellschaft.
- ▶ Zahlen sind die Grundlage für Vergleiche und die daraus resultierenden Entscheidungsprozesse.
- ▶ Man kann natürlich Zahlen fälschen und damit Schaden anrichten.
- ▶ Können aber Zahlen selber lügen?
- ▶ Die Zahlen selber nicht, wohl aber die Menschen, die sie benutzen.
- ▶ Das geht auch und ist viel subtiler, wenn man die Zahlen selber nicht fälscht.

Ein paar Statistiken zum Mitdenken

- ▶ Die folgenden Statistiken sind korrekt.
- ▶ Frage: Was ist Ihr spontaner Gedanke?

- ▶ Lebenspartner
- ▶ Geschiedene Leute haben eine höhere Lebenserwartung.

- ▶ Karriere
- ▶ Leute in Führungspositionen haben größere Füße.

- ▶ Religion
- ▶ Mehr als siebenzig Prozent aller Verbrecher in Bayern sind katholisch.

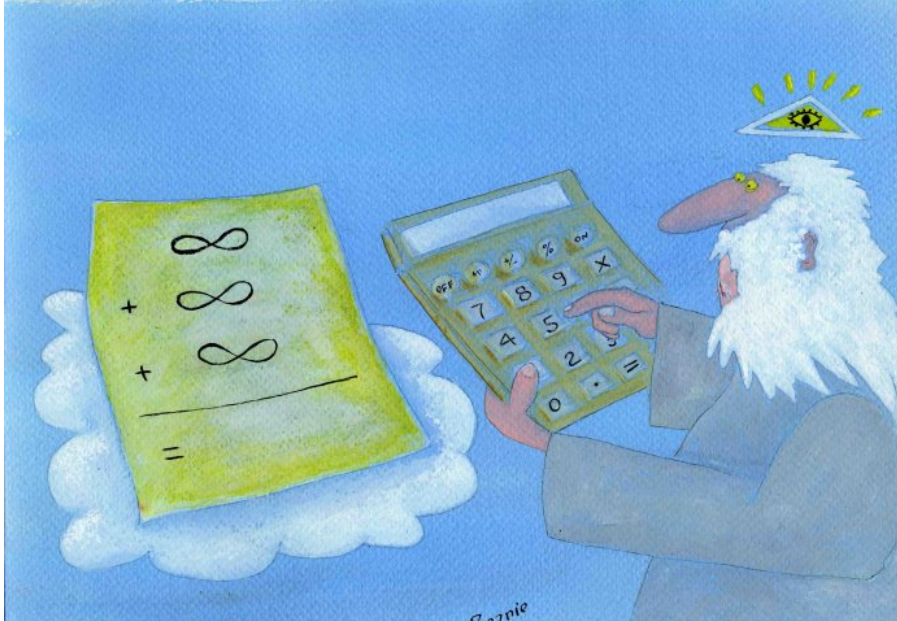
Intermezzo: Zählen

Es gibt
3 Arten
von
Menschen:

Diejenigen,
die zählen
können,
und die, die
es nicht
können.



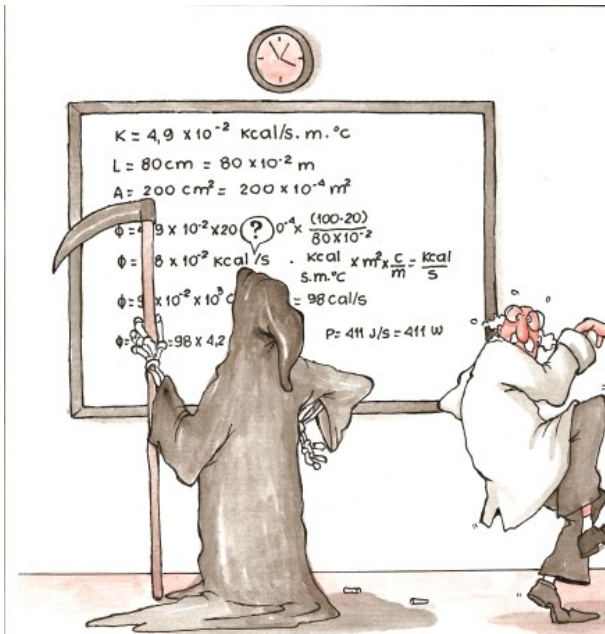
Intermezzo: Unendlich



Intermezzo: Imaginär



Intermezzo: Mathematik rettet Leben



Intermezzo: Entscheidung



Topologen, Donuts und Kaffeetassen

- ▶ Häufig zitierte Phrase:

Ein Topologe ist jemand, der einen Donut nicht von einer Kaffeetasse unterscheiden kann.

- ▶ Schon besser:

Ein Topologe ist jemand, der einen Donut von einer Kaffeetasse unterscheiden kann, aber nicht unbedingt will.

- ▶ Noch besser:

Topologen hatten die geniale Einsicht, dass in einem gewissen Sinn das geometrische Gebilde, das einen Donut beschreibt, dasselbe ist wie das geometrische Gebilde, das eine Kaffeetasse beschreibt.

Homöomorphie

- ▶ Seien M und N zwei geometrische Gebilde.
- ▶ Sie heißen **homöomorph**, wenn es eine bijektive Abbildungen $f: M \rightarrow N$ derart gibt, dass f und f^{-1} stetig sind.
- ▶ Anschaulich bedeutet dies, dass man durch Ziehen und Zerren ein Gebilde in das andere überführen kann, ohne dass man zwischenzeitlich etwas aufschneidet oder zerreißt und wieder zusammenfügt.

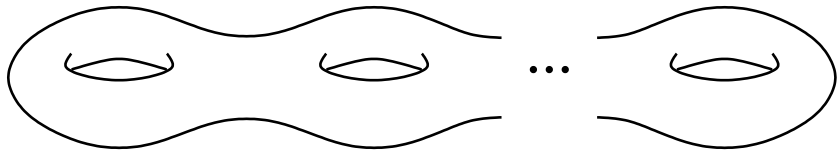
- ▶ Eine Kugel vom Radius 1 m und eine Kugel vom Radius 1 km sind homöomorph.
- ▶ Eine Kugel und ein Würfel sind homöomorph.
- ▶ Eine Kaffeetasse und ein Donut sind homöomorph.
- ▶ Eine Kugel und ein Donut sind **nicht** homöomorph.

Flächen

- ▶ Eine **Fläche** ist ein geometrisches geschlossenes Teilgebilde im drei-dimensionalen Raum, das lokal homöomorph zum zwei-dimensionalen Raum ist.
- ▶ Theorem: Jede Fläche ist zu genau einer Standardfläche vom Geschlecht g homöomorph.

► Fläche vom Geschlecht g .

(Das Geschlecht ist die Anzahl der Löcher).



- ▶ Die folgenden Bilder zeigen Objekte, deren Oberfläche eine Fläche beschreibt.
- ▶ Frage: Was ist ihr Geschlecht?

















Euler-Charakteristik

- ▶ Man kann jede Fläche mit Vielecken so überdecken, dass zwei Vielecke sich gar nicht berühren oder ihr Durchschnitt genau aus einer Kante besteht.



© 2001 Winston Mitchell

- ▶ Die **Euler-Charakteristik** χ so einer Überdeckung ist definiert als

$$\chi = E - K + F$$

wobei E , K und F die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen ist.

- ▶ Theorem: Die Euler-Charakteristik hängt **nicht** von der Wahl der Überdeckung ab.

- ▶ Zwei Flächen sind genau dann homöomorph, wenn sie dieselbe Euler-Charakteristik haben, denn es gilt

$$\chi(F_g) = 2 - 2g,$$

- ▶ Also zählt die Euler-Charakteristik Löcher.
- ▶ Die Euler-Charakteristik der Kugeloberfläche F_0 ist 2.
- ▶ Die Euler-Charakteristik der Oberfläche eines Donuts F_1 ist 0.
- ▶ Die Euler-Charakteristik der Oberfläche einer Kaffeetasse ist auch 0.

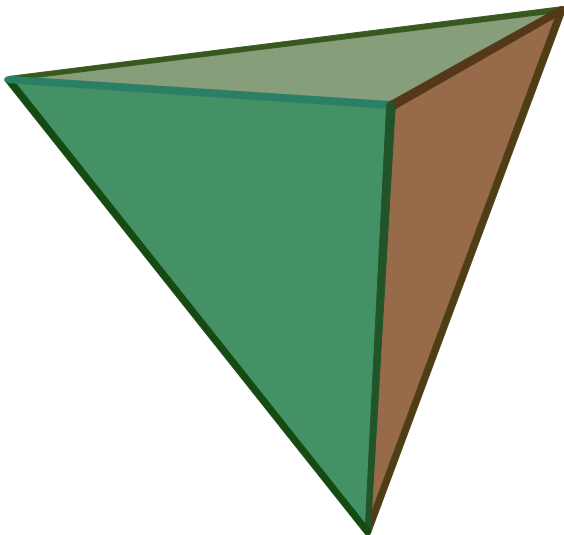
Platonische Körper

- ▶ Ein **Platonischer Körper** ist ein konvexer Körper im Raum, der durch deckungsgleiche reguläre n -Ecke derart begrenzt wird, dass jede Kante zu genau zwei regulären n -Ecken gehört und an jeder Ecke genau m Kanten zusammenstoßen.
- ▶ Platonische Körper sind konvexe Körper mit größtmöglicher **Symmetrie**.

Tetraeder

Tetrahedron.svg

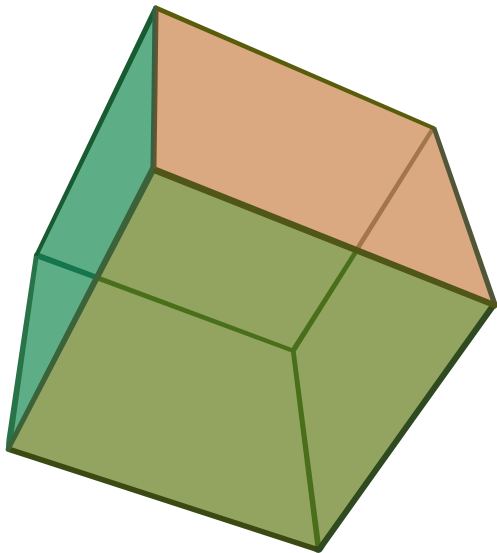
11.06.08 23:45



Hexaeder

Hexahedron.svg

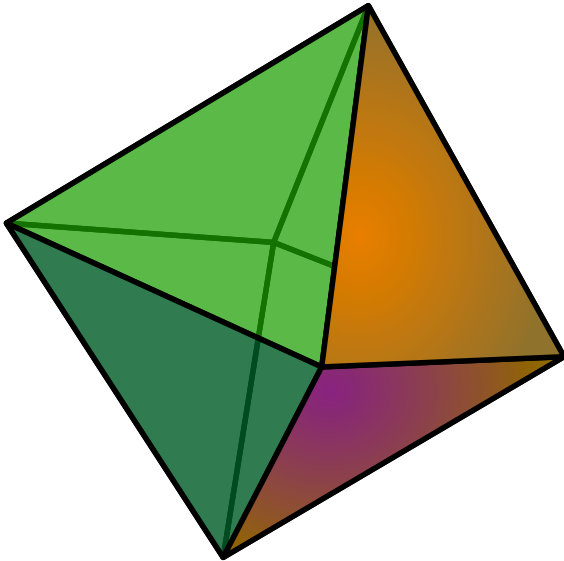
11.06.08 23:58



Oktaeder

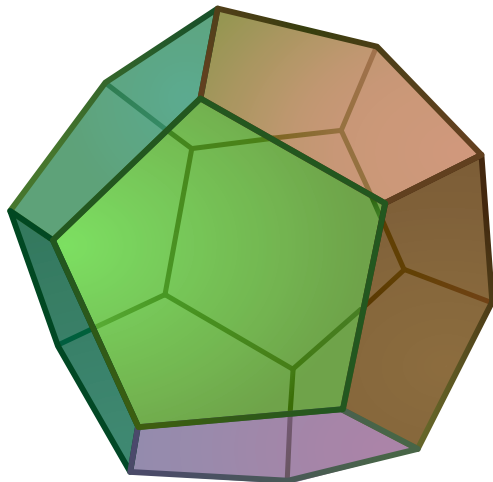
Octahedron.svg

12.06.08 00:00



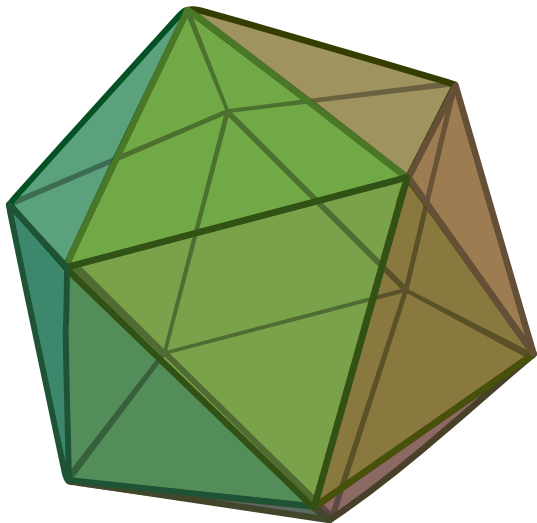
Dodekaeder

POV-Ray-Dodecahedron.svg



Ikosaeder

Icosahedron.svg



- ▶ Obwohl es beliebig viele regelmäßige Vielecke gibt, existieren nur fünf regelmäßige Körper:

Tetraeder,

Hexaeder (oder **Würfel**),

Oktaeder,

Dodekaeder,

Ikosaeder.

- ▶ Das wollen wir mit Hilfe der Euler-Charakteristik beweisen.
- ▶ Die Oberfläche eines Platonischen Körpers ist zu der Kugeloberfläche homöomorph.
- ▶ Also gilt

$$E - K + F = 2.$$

- ▶ Offensichtlich gilt auch

$$mE = 2K$$

und

$$nF = 2K$$

- ▶ Daraus folgt die Gleichung

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{K} + \frac{1}{2}.$$

- ▶ Aus der letzten Gleichung folgt

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

- ▶ Offensichtlich muss $m, n \geq 3$ gelten.
- ▶ Also ist nur möglich

$$m = 3 \quad n = 3;$$

$$m = 4 \quad n = 3;$$

$$m = 3 \quad n = 4;$$

$$m = 3 \quad n = 5;$$

$$m = 5 \quad n = 3.$$

| m | n | E | K | F |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 3 | 3 | 6 | 4 | 4 |
| 3 | 4 | 12 | 8 | 6 |
| 4 | 3 | 12 | 6 | 8 |
| 3 | 5 | 30 | 20 | 12 |
| 5 | 3 | 30 | 12 | 20 |

| m | n | E | K | F | Körper |
|-----|-----|-----|-----|-----|------------|
| 3 | 3 | 6 | 4 | 4 | Tetraeder |
| 3 | 4 | 12 | 8 | 6 | Hexaeder |
| 4 | 3 | 12 | 6 | 8 | Oktaeder |
| 3 | 5 | 30 | 20 | 12 | Dodekaeder |
| 5 | 3 | 30 | 12 | 20 | Ikosaeder |

Ausblick

- ▶ Im Allgemeinen ist Zählen eine Art **Messvorgang**, der nicht unbedingt Werte in \mathbb{N} liefert.
- ▶ Beispiel: Distanz zweier Punkte, Flächeninhalt einer Figur, Volumen eines Körpers. Diese nehmen Werte in \mathbb{R} an.
- ▶ Die **Additivität** ist dabei eine entscheidende Eigenschaft.
- ▶ Für die Anzahl von Elementen von endlichen Mengen gilt

$$|M \cup N| = |M| + |N| - |M \cap N|.$$

- ▶ Für die Euler Charakteristik von endlichen CW-Komplexen gilt

$$\chi(X \cup Y) = \chi(X) + \chi(Y) - \chi(X \cap Y).$$

- ▶ Oftmals liegen die Werte, die man Elementen zuordnet, in allgemeineren Objekten, wie zum Beispiel abelschen Gruppen.
- ▶ Beispielsweise misst die **projektive Klassengruppe** $K_0(R)$ eines Ringes R die Menge der stabilen Isomorphieklassen von endlich erzeugten projektiven Moduln.

- ▶ Dabei wird die Additivität zu der Bedingung, dass

$$[P_1] = [P_0] + [P_2]$$

gilt, falls es eine exakte Sequenz $0 \rightarrow P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow 0$ gibt.

- ▶ Die Berechnung der Gruppe $K_0(R)$ selber ist ein fundamentales Problem.

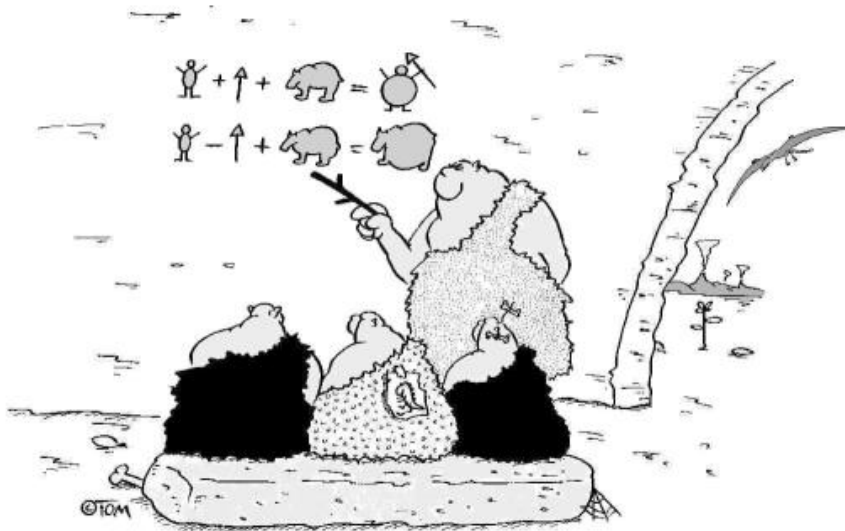
- ▶ Im Idealfall kann man geometrischen Objekten eine berechenbare Invariante in einer abelschen Gruppe zuordnen, die genau dann den Wert Null hat, wenn das geometrische Objekt eine gewünschte Eigenschaft hat.
- ▶ Beispielsweise hat eine Mannigfaltigkeit genau dann Euler-Charakteristik Null, wenn sie ein nirgends verschwindendes Vektorfeld besitzt.

- ▶ In der modernen Mathematik ist der Übergang von geometrischen Objekten zu algebraischen Objekten ein extrem erfolgreiches Konzept.
- ▶ Die Zuordnung, die einer Fläche ihre Euler-Charakteristik zuordnet, ist ein klassisches Paradebeispiel.
- ▶ Allgemeiner kann man beispielsweise einer Mannigfaltigkeit ihre **Fundamentalgruppe** zuordnen.
- ▶ **Borel-Vermutung**: Zwei asphärische Mannigfaltigkeiten sind genau dann homöomorph, wenn ihre Fundamentalgruppen isomorph sind.

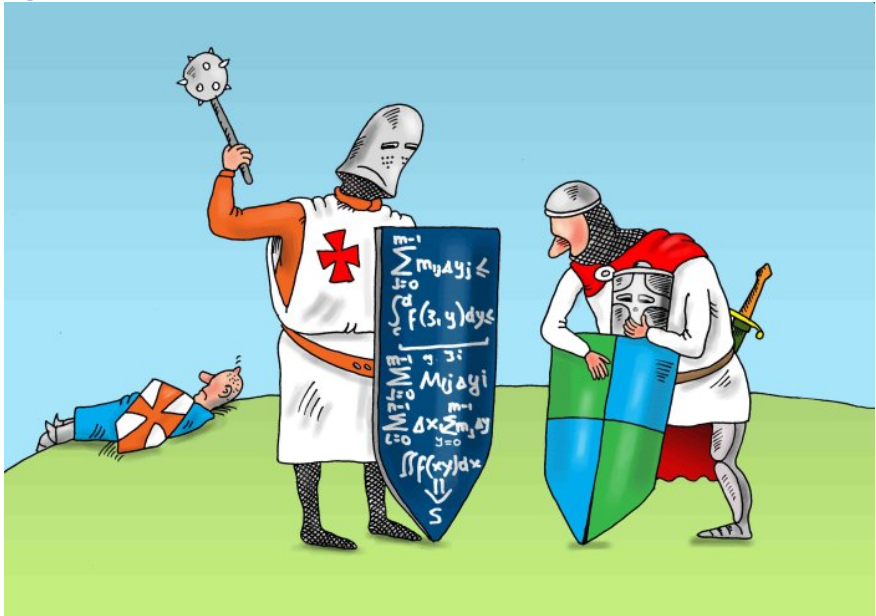
Zugabe: Unberechenbar



Zugabe: Mathematik in der Steinzeit



Zugabe: Mathematik als Waffe



Zugabe: Kurvendiskussion



Zugabe: Was
Mathematik-Professoren so tun

Professors



What my parents think I do



What my friends think I do



What my students think I do



What my spouse thinks I do



What my colleagues think I do



What I actually do