“Das Jones-Polynom und Entwirrungs-Invarianten in der Knotentheorie”

von

Wolfgang Lück

0. Einführung

Dieser Artikel ist eine wesentlich erweiterte Fassung eines Vortrags des Autors im Eichstätter Kolloquium zur Didaktik der Mathematik im Februar 1995. Entsprechend ist der Sinn dieses Artikels, Nicht-Experten einen Überblick über das Jones-Polynom und seine Verallgemeinerungen zu geben und dabei einige Grundlagen der Knotentheorie zu erörtern. Die Knotentheorie ist dafür ein sehr attraktives Gebiet, da ihre Grundlagen, Probleme und sogar einige der neueren Forschungsergebnisse ohne größere Vorkenntnisse erklärt werden können. Es sei bemerkt, daß der Autor selbst keinen Beitrag zu den hier vorgestellten Ergebnissen geleistet hat, sondern lediglich versucht, diese Resultate verständlich zu präsentieren.

Die erforderlichen Vorkenntnisse an den Leser sind dabei so gering wie möglich gehalten worden. So ist das erste Kapitel für einen Abiturienten lesbar und geeignet für einen Leistungskurs in Mathematik in der 13. Klasse eines Gymnasiums. Dort wird intuitiv der Begriff des Knotens und der Äquivalenz von Knoten erläutert und das Jones-Polynom mit Hilfe der Kauffman-Klammer eingeführt. Das Jones-Polynom ist eine sehr gute Invariante, um Knoten bis auf Äquivalenz zu unterscheiden.

Die folgenden Kapitel sind für einen Studenten mittleren Semesters lesbar. Im zweiten Kapitel wird der Begriff des Knotens und der Äquivalenz von Knoten im mathematischen Sinn eingeführt und auf Verschlingungen in 3-Mannigfaltigkeiten erweitert. Falls dem Leser der Begriff einer 3-Mannigfaltigkeit nicht geläufig ist, genügt es, sich auf Verschlingungen in S^3 zu beschränken oder sogar sich mit dem intuitiven Begriff aus dem ersten Kapitel zu begnügen.

Im dritten Kapitel wird eine der ältesten Invarianten der Knotentheorie eingeführt, das Alexander-Polynom. Wir erklären den Zugang mittels Seifert-Flächen und Seifert-Matrizen.

Im vierten Kapitel entwickeln wir den klassischen Zusammenhang zwischen Zöpfen und Verschlingungen. Dieser Zusammenhang ist von fundamentaler Bedeutung zum Beispiel für die Konstruktion der universellen Entwirrungs-Invarianten im sechsten Kapitel.

Im fünften Kapitel führen wir den Begriff einer Entwirrungs-Invarianten (engl.: skein invariant) ein. (Manchmal findet man auch die Übersetzung Schienen-Invariante anstatt Entwirrungs-Invariante.) Grob gesprochen ist eine Knoteninvariante eine Entwirrungs-Invariante, falls es eine Formel gibt, die die Änderung der Invarianten bei einer lokalen Änderung einer Kreuzung beschreibt. Auf diese Weise kann man die Invariante eines Knotens dadurch berechnen, daß man Kreuzungen nach und nach ändert bzw. auflöst, also den Knoten entwirrt, und damit die Berechnung induktiv auf den trivialen Knoten zurückspielt. Das Alexander-Polynom und das Jones-Polynom sind Beispiele für Entwirrungs-Invarianten.

Im sechsten Kapitel konstruieren wir die universelle Entwirrungs-Invariante, die als Spezialfälle das Alexander-Polynom und das Jones-Polynom liefert und somit beide Invarianten vereinigt und sogar verallgemeinert. Wir folgen hier dem Zugang von Ocneanu mittels Darstellungen der Zopf-Gruppen in Hecke-Algebren und Spuren auf den Hecke-Algebren.

Im siebten Kapitel geben wir eine Übersicht über die Anwendung des Jones-Polynoms auf die Beweise der sogenannten Tait-Vermutungen, die vor 100 Jahren aufgestellt wurden und in den letzten Jahren mit Hilfe des Jones-Polynoms bewiesen wurden. Schließlich erwähnen wir kurz weitere neuere Entwicklungen in der Knotentheorie wie die der Vassiliev-Invarianten und der Konstruktion von Knoteninvarianten mit Hilfe von Quantenfeldtheorien und Quantengruppen und geben Literaturhinweise.

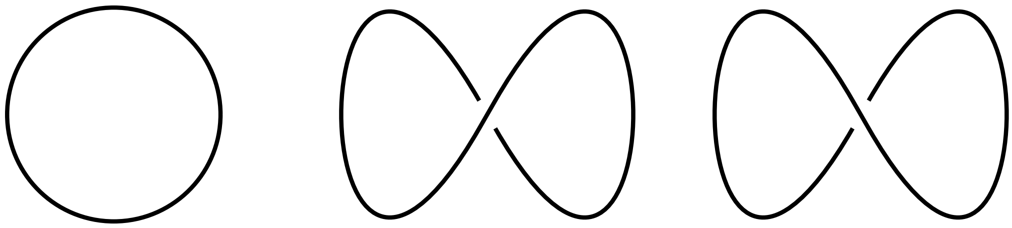
Die Arbeit ist in folgende Kapitel unterteilt:

1. Ein elementarer Zugang zum Jones-Polynom
2. Der Begriff des Knotens und der Verschlingung
3. Das Alexander-Polynom
4. Verschlingungen und Zöpfe
5. Entwirrungs-Invarianten
6. Die Konstruktion der universellen Entwirrungs-Invarianten
   mit Hilfe von Hecke-Algebren
7. Schlußbemerkungen
   Literatur

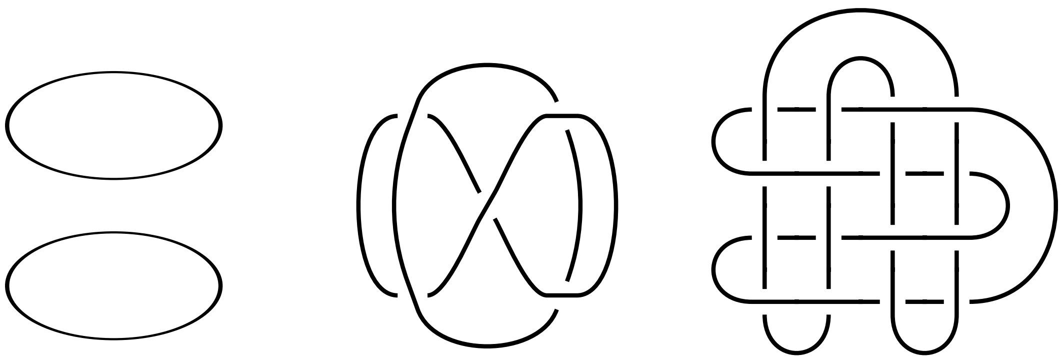
1. Ein elementarer Zugang zum Jones-Polynom

Zunächst geben wir eine intuitive Erklärung des Begriffs einer Verschlingung, die zwar mathematisch nicht exakt ist, aber beispielsweise für den Schulunterricht sicher ausreicht. Eine *Verschlingung mit n Komponenten* stellt man sich als n (geschlossene) Gummibänder vor, die im Raum so verteilt sind, daß kein Gummiband sich selbst oder ein anderes berührt. Eine Verschlingung mit nur einer Komponente heißt *Knoten*. Zwei solche Verschlingungen nennen wir *äquivalent*, falls sich die eine in die andere durch Umlegen, Ziehen und Zerren überführen läßt, wobei bei diesen Manipulationen kein Gummiband sich selbst oder ein anderes durchdringen darf. In anderen Worten, es ist nicht erlaubt, daß man zwischenzeitlich ein Gummiband öffnet und dann wieder zusammenklebt. Man schaue sich die folgenden Beispiele an, in denen die Bilder in jeder Figur äquivalente Verschlingungen beschreiben:

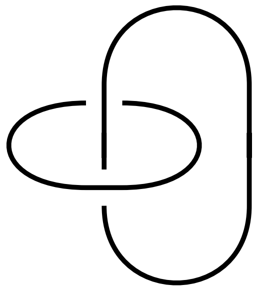
1.1 Trivialer Knoten

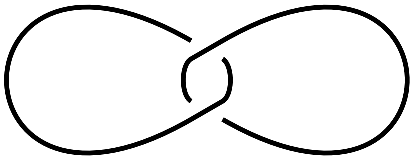


1.2 Triviale Verschlingung mit zwei Komponenten

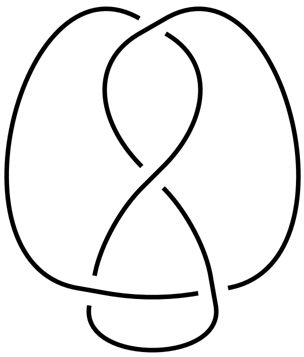


1.3 Hopf-Verschlingung

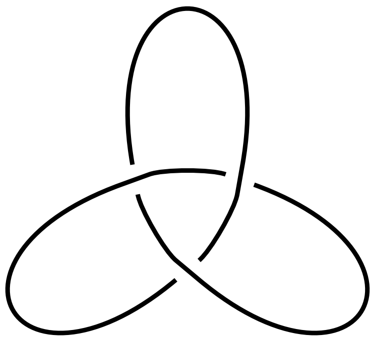




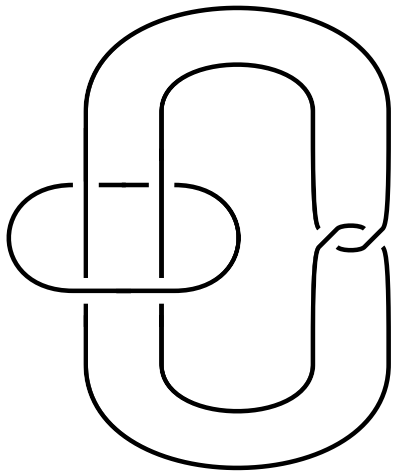
1.4 Achterknoten



1.5 rechtshändiger Kleeblatt-Knoten



1.6 Whitehead-Verschlingung



Das grundlegende Problem der Knotentheorie lautet:

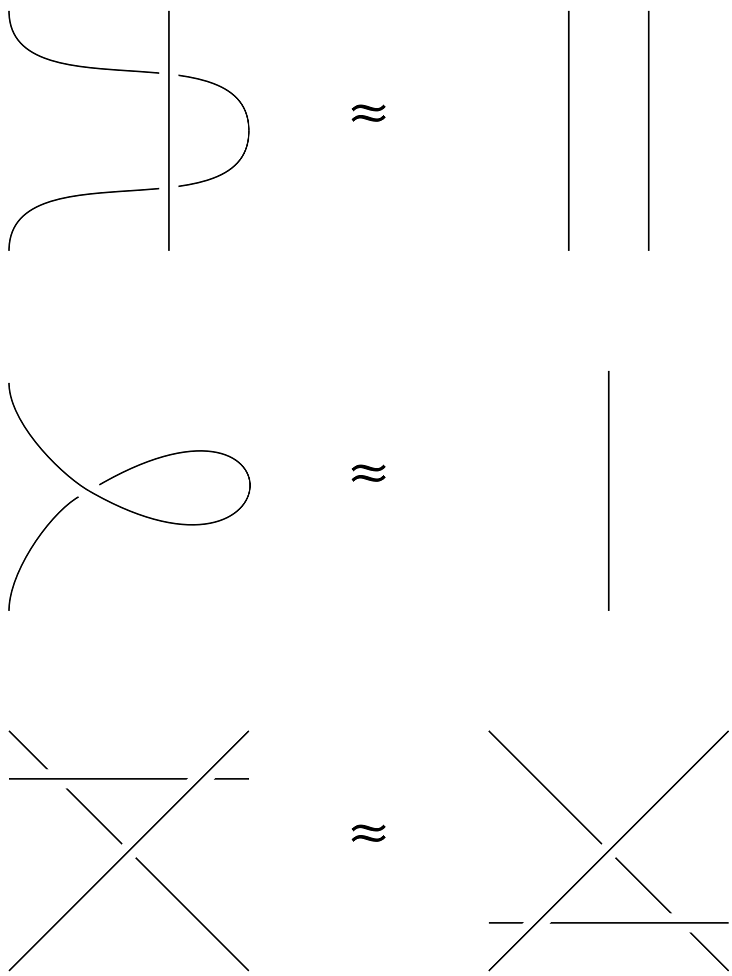
Problem 1.7 (Verschlingungsproblem) *Wann sind zwei Verschlingungen äquivalent?*

Fertigt man sich einige Verschlingungen aus irgendeinem Material an und versucht experimentell, zum Beispiel den Achterknoten in den Kleeblatt-Knoten zu überführen, so gibt man das nach einiger Zeit auf. Man kommt recht schnell zu der Vermutung, daß der triviale Knoten, der Achterknoten und das rechtshändige Kleeblatt nicht äquivalent sind. Ebenso scheinen die triviale Verschlingung mit zwei Komponenten, die Hopf-Verschlingung und die Whitehead-Verschlingung nicht äquivalent zu sein. Schwerer ist da die Frage, ob der rechtshändige Kleeblatt-Knoten und sein Spiegelbild, der linkshändige Kleeblatt -Knoten, der durch Umkehrung der Kreuzungen entsteht, äquivalent sind. Das Ziel dieses ersten Kapitels ist es, mit Hilfe des Jones-Polynoms die oben aufgelisteten Verschlingungen bis auf Äquivalenz zu unterscheiden.

Es ist natürlich viel einfacher, mit den zwei-dimensionalen Bildern zu arbeiten als mit den Verschlingungen selbst. Versuchen wir uns zu überlegen, wie solche Bilder aussehen und wann zwei solcher Bilder äquivalente Verschlingungen beschreiben. Ein *Verschlingungsdiagramm* aus n Komponenten besteht aus n geschlossenen Wegen in der Ebene, die folgenden Bedingungen genügen: Es gibt nur endlich viele Punkte in der Ebene, an denen ein Weg sich selbst oder einen anderen Weg trifft. Solche Punkte heißen Kreuzungen. An jeder Kreuzung treffen sich genau zwei Zweige, und sie treffen sich *transversal*, d.h. der eine Zweig muß den anderen Zweig in einem von Null verschiedenen Winkel überqueren. An jeder Kreuzung soll markiert sein, welcher Zweig über den anderen verläuft. Ein Verschlingungsdiagramm mit nur einer Komponente heißt *Knotendiagramm*.

Es ist zumindestens anschaulich klar, daß jede Verschlingung ein Verschlingungsdiagramm liefert, man muß sich die Verschlingung aus einem geeigneten Blickwinkel anschauen, um Mehrfachkreuzungen und Berührungen zu vermeiden. Offensichtlich kommt auch jedes Verschlingungsdiagramm von einer Verschlingung. Das entscheidende Problem besteht nun darin, den Begriff *äquivalente Verschlingungsdiagramme* so einzuführen, daß äquivalente Verschlingungen äquivalente Verschlingungsdiagramme liefern und umgekehrt. Falls man zwei Verschlingungsdiagramme durch Verschieben so ineinander überführen kann, daß keine neuen Kreuzungen hinzugefügt oder Kreuzungen weggenommen werden und die Kreuzungen während dieses Prozesses immer noch den oben beschriebenen Bedingungen genügen, so sind die zugehörigen Verschlingungen sicherlich äquivalent. Also müssen Verschlingungsdiagramme, die in der oben beschriebenen Weise auseinander hervorgehen, auf alle Fälle äquivalent sein. Wir werden im folgenden stillschweigend voraussetzen, daß wir diese Art von Manipulationen an Verschlingungsdiagrammen ausführen dürfen. Das genügt aber noch nicht. Man muß auch zulassen, daß folgende Typen von Operationen ein Verschlingungsdiagramm in ein äquivalentes Verschlingungsdiagramm überführen:

1.8 Reidemeister-Bewegungen



Satz 1.9 (Reidemeister [33]) *Äquivalente Verschlingungen liefern äquivalente Verschlingungsdiagramme und umgekehrt.*

Das Verschlingungsdiagrammproblem ist in der Tat eine Vereinfachung. Jetzt hat man es nämlich nur noch mit zwei-dimensionalen kombinatorischen Gebilden zu tun. Die generelle Strategie ist nun die folgende: Definiere zu jedem Verschlingungsdiagramm ein Polynom und zeige, daß es sich nicht verändert, wenn man eine der Reidemeister-Bewegungen durchführt. Dann können wir jeder Verschlingung ein Polynom zuorden, indem wir das Polynom eines zugehörigen Verschlingungsdiagrammes nehmen. Das so definierte Polynom ist für äquivalente Verschlingungen gleich. Um zu zeigen, daß zwei Verschlingungen nicht äquivalent sind, genügt es zu zeigen, daß die zugehörigen Polynome verschieden sind. Damit hat man ein sehr wirksames Mittel, um zu entscheiden, ob zwei Verschlingungen nicht äquivalent sind, denn es ist relativ einfach, zum Beispiel das Jones-Polynom auszurechen. Dagegen kann man nicht direkt entscheiden, ob zwei Verschlingungsdiagramme durch eine Folge von Reidemeister-Bewegungen auseinander hervorgehen, denn es könnte ja immer noch eine weitere sehr komplizierte Folge von Reidemeister-Bewegungen geben, die ein Diagramm in das andere überführt und die man nicht gefunden hat. Allerdings ist es immer noch möglich, daßäquivalente Verschlingungen dasselbe Jones-Polynom ergeben.

Wir führen nun das *Jones-Polynom* einer Verschlingung L ein und folgen dabei dem Zugang von Kauffman [22]. Dazu benötigt man aber die folgende zusätzliche Struktur auf einem Verschlingungsdiagramm.

Ein Verschlingungsdiagramm heißt *orientiert*, falls man auf jeder Komponente einen Durchlaufsinn festgelegt hat. Dieser Durchlaufsinn wird in den Diagrammen durch Hinzunahme von Pfeilen festgelegt. Für die entsprechenden Begriffe von Äquivalenz und von Reidemeister-Bewegungen von orientierten Verschlingungsdiagrammen muß man nun die Orientierungen berücksichtigen. Das Jones-Polynom wird für ein orientiertes Verschlingungsdiagramm definiert. Es stellt sich heraus, daß es sich nicht verändert, wenn man die drei Reidemeister-Bewegungen anwendet. Also hängt das Jones-Polynom nur von der Äquivalenzklasse der durch das orientierte Verschlingungsdiagramm gegebenen Verschlingung ab. Falls man nicht-orientierte Verschlingungsdiagramme betrachten will, schaut man sich die möglichen Orientierungen an und rechnet für jede das Jones-Polynom aus. Für Knoten verändert sich das Jones-Polynom nicht, wenn man die Orientierung umkehrt. Falls zwei Verschlingungsdiagramme äquivalent sind, kann man immer solche Orientierungen finden, daß sie als orientierte Verschlingungsdiagramme äquivalent sind.

Beginnen wir mit einem zunächst nicht orientierten Verschlingungsdiagramm V. Für jede Kreuzung gibt es zwei Wahlen von *Markierungen*, die wir in Figur 1.10 festlegen.

1.10

Wenn man den überkreuzenden Zweig entgegen dem Uhrzeigersinn um einen Winkel kleiner als 180 Grad so dreht, daß er auf dem unterkreuzenden Zweig zu liegen kommt, so überstreicht er die beiden Regionen, die die Markierung A auszeichnet. Entsprechend diesen Markierungen löst man die Kreuzungen wie in Figur 1.11 illustriert auf, indem man die Regionen, die die Markierung auswählt, verbindet.

1.11

Ein *Zustand* Z für V ist eine Wahl von Markierungen für jede Kreuzung. Sei $a(Z)$ bzw. $b(Z)$ die Anzahl der Markierungen vom Typ A bzw. vom Typ B. Wenn wir die Kreuzungen wie oben beschrieben auflösen, erhalten wir eine Menge von geschlossenen Kurven, die sich nicht schneiden, aber eventuell einander umschließen. Sei $|Z|$ die Anzahl dieser Kreise. Wir definieren ein Polynom in den Unbestimmten A,B und d mit Koeffizienten in den ganzen Zahlen durch

$$< V > = \sum_Z A^{a(Z)} B^{b(Z)} d^{|Z|-1}.$$

Falls V keine Kreuzungen besitzt und n Komponenten hat, setze $< V > = d^{n-1}$. Sei O das triviale Knotendiagramm. Falls V ein Verschlingungsdiagramm ist, entstehe $V \sqcup O$ aus V durch Hinzufügen eines von V völlig getrennten trivialen Knotens.

Satz 1.12
1.) $< O > = 1$;

2.) $< O \sqcup V > = d < V >$ *, falls V nicht-leer ist;*

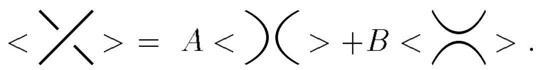
3.) Sei V ein nicht orientiertes Verschlingungsdiagramm und $\times$ eine Kreuzung. Sei V_A bzw. V_B das Verschlingungsdiagramm, das man aus V durch Auflösen der Kreuzung $\times$ entsprechend der Markierung A bzw. B erhält. Dann gilt:

$$< V > = A < V_A > + B < V_B > .$$

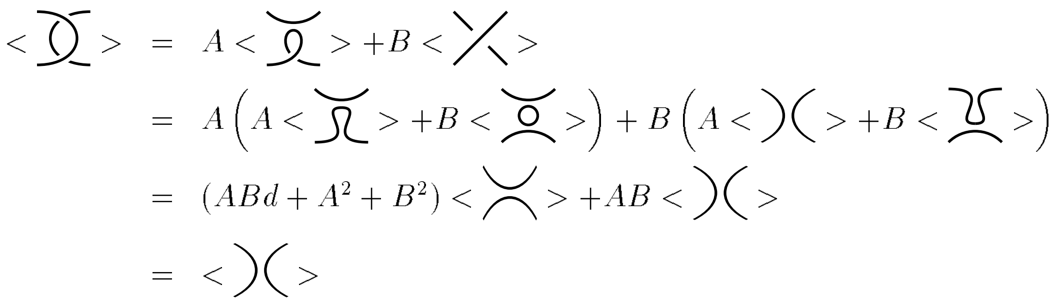
Der Beweis des Satzes 1.12 ergibt sich direkt aus den Definitionen.

Satz 1.13 *Das Polynom $< >$ ist invariant unter der ersten und dritten Reidemeister-Bewegung, falls man $B = A^{-1}$ und $d = -A^2 - A^{-2}$ setzt.*

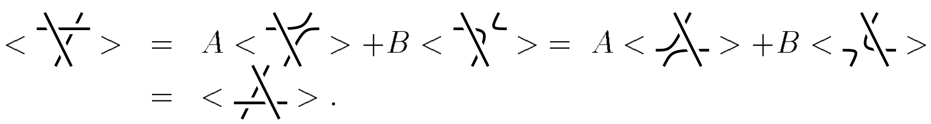
Der Beweis des Satzes 1.13 kann mit Hilfe einiger sogenannter "Diagrammrechnungen" geführt werden. Wir kürzen im folgenden die Gleichung in Satz 1.12.3 ab durch:



Nun folgt Satz 1.13 aus folgenden Rechnungen:

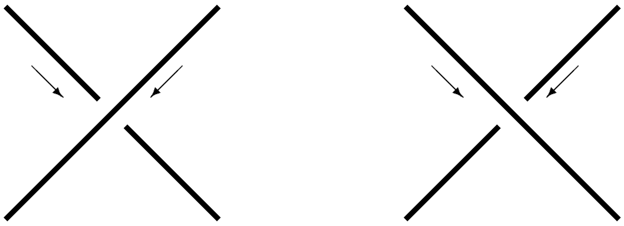


und unter Verwendung des ersten Ergebnisses



Man muß nun noch die zweite Reidemeister-Bewegung betrachten. Tatsächlich ist $< V >$ auch nach den Einsetzungen $B = A^{-1}$ und $d = -A^2 - A^{-2}$ nicht invariant unter der zweiten Reidemeister-Bewegung. Um dies zu korrigieren, führt man für ein orientiertes Verschlingungsdiagramm V die *Verdrillungszahl* $w(V)$ wie folgt ein: Eine Kreuzung im orientierten Verschlingungsdiagramm heißt *positiv* bzw. *negativ*, wenn sie wie in Figur 1.14 beschrieben aussieht.

1.14



positiv *negativ*

Wenn man den überkreuzenden Zweig entgegen dem Uhrzeigersinn um einen Winkel kleiner als 180 Grad so dreht, daß er auf dem unterkreuzenden Zweig zu liegen kommt, so ist die Kreuzung positiv, falls die beiden Orientierungen in dieselbe Richtung zeigen, und negativ andernfalls. Wir definieren $w(V)$ als die Anzahl der positiven Kreuzungen minus der Anzahl der negativen Kreuzungen. Sei $<< V >>$ das Polynom in den Unbestimmten A und A^{-1}, das aus $< V >$ durch die Einsetzungen $B = A^{-1}$ und $d = -A^2 - A^{-2}$ entsteht.

Definition 1.15 *Das* Jones-Polynom *einer orientierten Verschlingung L ist gegeben als das Polynom in den Unbestimmten A und A^{-1} mit ganzzahligen Koeffizienten,*

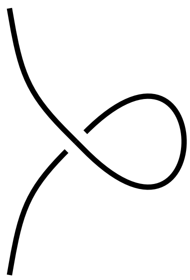
$$J_L(A) = (-A)^{-3w(V)} << V >>,$$

wobei V ein beliebiges orientiertes Verschlingungsdiagramm ist, das die Verschlingung L beschreibt.

Damit dieses Polynom wirklich nur von der Verschlingung L und nicht von der Wahl des orientierten Verschlingungsdiagramms V abhängt, müssen wir zeigen, daß der Ausdruck $(-A)^{-3w(V)} << V >>$ invariant unter den drei Reidemeister-Bewegungen ist. Die Verdrillungszahl ändert sich durch die erste und dritte Reidemeister-Bewegung nicht. Damit folgt die Invarianz unter der ersten und dritten Reidemeister-Bewegung aus Satz 1.13. Es bleibt die zweite Reidemeister-Bewegung zu untersuchen.

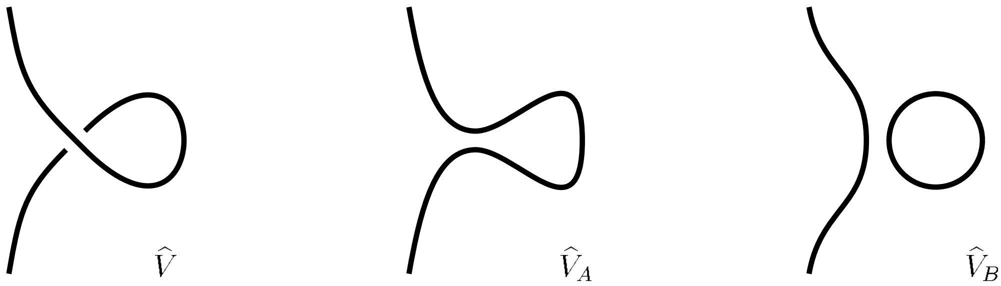
Es entstehe V aus $\widehat{V}$ durch Ersetzen einer Schleife wie in Figur 1.16 durch einen Bogen.

1.16



Dann haben $\widehat{V}$, $\widehat{V}_A$ und $\widehat{V}_B$ die in Figur 1.17 illustrierte Gestalt.

1.17



Wir berechnen

$$\begin{aligned} << \widehat{V} >> &= A << V >> + A^{-1} << V \sqcup O >> \\ &= A << V >> + A^{-1} \left(-A^2 - A^{-2} \right) << V >> \\ &= (-A)^{-3} << V >> . \end{aligned}$$

Wegen $w(\widehat{V}) = w(V) - 1$ folgern wir $J_{\widehat{L}} = J_L$. Der Beweis für die andere Schleife verläuft analog. Damit haben wir das Jones-Polynom konstruiert und gezeigt, daß es eine Invariante der Äquivalenzklasse einer orientierten Verschlingung ist.

Zwei Eigenschaften des Jones-Polynoms sind noch von großem Interesse: Sei V ein orientiertes Verschlingungsdiagramm. Es entstehe V^- aus V, indem man alle Orientierungen der Komponenten gleichzeitig umkehrt. Das *Spiegelbild* $V^\times$ entsteht aus V, indem man gleichzeitig alle Kreuzungen umkehrt, d.h. man vertauscht den oberen und den unteren Zweig. Folgender Satz ist leicht zu beweisen:

Satz 1.18 *Sei V ein orientiertes Verschlingungsdiagramm. Dann gilt*

$$\begin{aligned} J_V(A) &= J_{V^\times}(A^{-1}); \\ J_V(A) &= J_{V^-}(A). \end{aligned}$$

Zunächst schauen wir uns die in Figur 1.3 aufgezeichnete Hopf-Verschlingung H an. Sie hat zwei Kreuzungen, und es gibt vier verschiedene Zustände. Wir erhalten $|Z| = 2$, falls die Markierungen beide gleich A oder beide gleich B sind und andernfalls $|Z| = 1$. Wir berechnen

$$< H > = A^2 d + 2AB + B^2 d.$$

Daraus folgt

$$<< H >> = A^2(-A^2 - A^{-2}) + 2AA^{-1} + A^{-2}(-A^2 - A^{-2}) = -A^4 - A^{-4}.$$

Weil $w(H) = -2$ bzw. $w(H) = 2$ je nach Wahl der Orientierungen gilt, erhält man als Jones-Polynom für die Hopf-Verschlingung:

$$J_H = -A^{10} - A^2 \quad \text{bzw.} \quad J_H = -A^{-2} - A^{-10}.$$

Da für die triviale Verschlingung mit zwei Komponenten $O \sqcup O$ (für jede Wahl von Orientierungen) gilt:

$$J_{O\sqcup O} = -A^2 - A^{-2},$$

sind die Hopf-Verschlingung und die triviale Verschlingung nicht vom gleichen Typ. Also kann man zwei Ringe, die wie in der Hopf-Verschlingung verkettet sind, nicht voneinander trennen, ohne die Ringe zu öffnen.

Das rechtshändige Kleeblatt T haben wir bereits in Figur 1.5 beschrieben. Sein Spiegelbild $T^\times$ ist das linkshändige Kleeblatt. Wir skizzieren die Berechnung des Jones-Polynoms von T: Es gibt drei Kreuzungen und damit acht verschiedene Zustände. Man errechnet

$$< T > = A^3d + 3A^2B + 3AB^2d + B^3d^2.$$

Damit ergibt sich

$$<< T >> = -A^5 - A^{-3} + A^{-7}.$$

Da $w(T) = 3$ ist, folgt

$$J_T(A) = A^{-4} + A^{-12} - A^{-16}.$$

Satz 1.18 liefert für das Spiegelbild

$$J_{T^\times}(A) = A^4 + A^{12} - A^{16}.$$

Also haben T und sein Spiegelbild $T^\times$ verschiedene Jones-Polynome und sind daher nicht äquivalente Knoten. Man rechnet ebenfalls leicht nach, daß die in den Figuren 1.1 bis 1.6 definierten Verschlingungen paarweise nicht äquivalent sind.

Zum Abschluß dieses Kapitels führen wir noch eine weitere elementare Invariante für orientierte Verschlingungen mit zwei Komponenten ein:

Definition 1.19 *Sei L eine orientierte Verschlingung mit zwei Komponenten L_1 und L_2. Wähle ein orientiertes Verschlingungsdiagramm V, das L beschreibt. Sei V_1 bzw. V_2 die zu L_1 bzw. L_2 gehörige Komponente von V. Wähle auf V_1 einen Punkt x und durchlaufe V_1 von x zurück nach x entsprechend der Orientierung. Sei p bzw. n die Anzahl der positiven bzw. negativen Unterkreuzungen von V_1 mit V_2, die man beim Durchlaufen antrifft. Definiere die* Verschlingungszahl

$$v(L_1, L_2) = p - n \qquad \in \mathbf{Z}.$$

Wir müssen zeigen, daß die Verschlingungszahl von der Wahl des Verschlingungsdiagramms unabhängig ist. Das überprüft man leicht anhand der drei Reidemeister-Bewegungen. Als nächstes zeigen wir

$$v(L_1, L_2) = v(L_2, L_1).$$

Die Differenz $v(L_1, L_2) - v(L_2, L_1)$ ändert sich nicht, wenn man eine der Kreuzungen ändert. Also genügt es, den Fall zu betrachten, daß alle Kreuzungen von V_1 mit V_2 Unterkreuzungen sind. Dann ist aber das orientierte Verschlingungsdiagramm $V_1 \coprod V_2$ äquivalent zu einem, in dem sich die beiden Komponenten überhaupt nicht treffen, und offensichtlich gilt $v(L_1, L_2) = v(L_2, L_1) = 0$.

Die Hopf-Verschlingung 1.3 hat je nach Wahl der Orientierungen die Verschlingungszahl ± 1. Das beweist erneut, daß sie nicht äquivalent zur trivialen Verschlingung mit zwei Komponenten ist, deren Verschlingungszahl offensichtlich 0 ist. Die Whitehead-Verschlingung 1.6 hat ebenfalls Verschlingungszahl 0.

2. Der Begriff des Knotens und der Verschlingung

In diesem Abschnitt geben wir im mathematischen Sinn die Definitionen des Begriffs des Knotens und der Verschlingung, die wir im ersten Abschnitt nur intuitiv behandelt haben.

Wir wollen zunächst exakt definieren, wann zwei Verschlingungen äquivalent sind. Eine naheliegende Idee wäre es, zwei Verschlingungen als äquivalent anzusehen, wenn man sie stetig ineinander überführen kann (d.h. wenn die zugehörigen Einbettungen topologisch isotop sind). Dies ist jedoch eine zu schwache Forderung, da man jeden Knoten auf diese Weise zum trivialen Knoten zusammenziehen könnte. Man führt daher den stärkeren Begriff der *ambienten (oder Umgebungs-) Isotopie* ein:

Definition 2.1 *Zwei Einbettungen f_0 und $f_1 : X \longrightarrow Y$ sind* ambient isotop*, falls es einen Höhe erhaltenden Homöomorphismus*

$$H : Y \times I \longrightarrow Y \times I \qquad H(y,t) = (h_t(y), t)$$

mit $f_1 = h_1 \circ f_0$ and $h_0 = id$ gibt.

Definition 2.2 *Eine* Verschlingung *L in einer 3-Mannigfaltigkeit ist eine Einbettung*

$$\coprod_{i=1}^{r} S^1 \longrightarrow M,$$

die zu einem einfachen geschlossenen Polygonzug (mit r Komponenten) in M ambient isotop ist. Die Anzahl der Komponenten der Verschlingung ist r. Ein Knoten *ist eine Verschlingung mit nur einer Komponenten. Zwei Verschlingungen heißen* äquivalent*, falls sie ambient isotop sind.*

Falls wir M nicht explizit festlegen, soll M die 3-dimensionale Sphäre S^3 sein. Man kann sich auch auf PL-Einbettungen (oder glatte Einbettungen) $\coprod_{i=1}^{r} S^1 \longrightarrow M$ beschränken und als den entsprechenden Äquivalenzbegriff ambient PL-isotop definieren. Dies ändert nichts an den Äquivalenzklassen, da zwei Verschlingungen genau dann ambient isotop sind, wenn sie ambient PL-isotop sind. (Zum Begriff der PL-Abbildung verweisen wir auf [35]). Falls man in der Definition 2.2 die Bedingung, daß die Verschlingung zu einem einfachen geschlossenen Polygonzug in M ambient isotop ist, fallen läßt, spricht man von einer wilden Verschlingung. Wir werden diese Bedingung aber immer voraussetzen, da die Untersuchung von wilden Knoten auf recht bizarre Phänomene führt und viele Konstruktionen diese Bedingung benötigen und zudem die Verschlingungen, die in den Anwendungen auftreten, diese Bedingung fast immer erfüllen.

Für Verschlingungen in S^3 gibt es noch einen weiteren sinnvollen Äquivalenzbegriff, der sich aber als gleichwertig zu dem oben eingeführten herausstellt: Sei N eine orientierte geschlossene Untermannigfaltigkeit von S^3 der Kodimension 2. Zwei solche Untermannigfaltigkeiten N_1 und N_2 heißen *äquivalent*, falls es einen orientierungserhaltenden Homöomorphismus $f : S^3 \longrightarrow S^3$ gibt, der einen orientierungserhaltenden Homöomorphismus von N_1 nach N_2 induziert. Jede Verschlingung L definiert eine orientierte geschlossene Untermannigfaltigkeit $|L|$ von S^3. Dann sind zwei Verschlingungen L_1 und L_2 genau dann äquivalent als Verschlingungen, wenn $|L_1|$ und $|L_2|$ als Untermannigfaltigkeiten im obigen Sinn äquivalent sind. Also kann man wahlweise eine Verschlingung in S^3 als Einbettung oder als orientierte geschlossene Untermannigfaltigkeit der Kodimension 2 auffassen. Diese Aussagen sind Konsequenzen aus den folgenden Sätzen (siehe [7, Chapter I.B], [10], [31], [35, page 47]), die bereits für sich genommen sehr interessante und wichtige Resultate sind:

Theorem 2.3 (Fisher) *Jeder orientierungserhaltende Homöomorphismus $S^3 \longrightarrow S^3$ ist ambient isotop zur Identität .*

Theorem 2.4 (Alexander-Schönflies-Theorem) *Sei $i : S^2 \longrightarrow S^3$ eine PL-Einbettung. Dann gibt es PL-Untermannigfaltigkeiten B_1 und B_2 von S^3, die PL-homöomorph zum 3-dimensionalen Standard-Simplex sind und $S^3 = B_1 \cup B_2$ und $i(S^2) = B_1 \cap B_2 = \partial B_1 = \partial B_2$ erfüllen.*

Theorem 2.5 (Alexander-Trick [1]) *Jeder PL-Homöomorphismus eines n-dimensionalen PL-Balles, der den Rand festhält, ist relativ Rand isotop zur Identität.*

Wir haben bereits erwähnt, daß man Verschlingungen auch durch Verschlingungsdiagramme beschreiben kann.

Definition 2.6 *Ein* Verschlingungsdiagramm *ist eine PL-Immersion $i : \coprod_{i=1}^r S^1 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ mit den Eigenschaften, daß alle Vielfachpunkte Doppelpunkte mit transversalen Kreuzungen sind und an jedem Doppelpunkt ein überkreuzender Zweig ausgewählt ist.*

Sei L ein Verschlingungsdiagramm. Sei $c(L)$ die Anzahl der Kreuzungen, $r(L)$ die Anzahl der Komponenten und $n(L)$ die minimale Anzahl der Kreuzungen, die man ändern muß, um ein Verschlingungsdiagramm zu erhalten, das die triviale Verschlingung beschreibt. Die Zahl $n(L)$ existiert aufgrund folgender Überlegung und heißt *Entknotungszahl*: Wähle eine Numerierung der Komponenten L_1, L_2, …, $L_{r(L)}$ sowie eine Orientierung jeder Komponente L_i. Für $i = 1, 2, \ldots r(l)$ führe man folgenden Prozess durch. Wähle einen Punkt x auf L_i. Man bewege sich entlang L_i entsprechenden der Orientierung von x, bis man wieder nach x zurückkommt. Dabei ändert man gegebenenfalls die Kreuzungen mit den Konponenten L_i, L_{i+1}, …, $L_{r(L)}$ so, daß der Zweig, auf dem man sich gerade bewegt, der überkreuzende Zweig ist. Man erhält dann durch eine endliche Anzahl von Änderungen von Kreuzungen ein Verschlingungsdiagramm, dessen zugehörige Verschlingung trivial ist. Das Paar $(c(L), n(L))$ heißt *Komplexität* der Verschlingung. In vielen Konstruktionen führt man eine Induktion über die Komplexität mit den trivialen Verschlingungen als Induktionsanfang durch, wobei $(c, n) < (c', n')$, falls $c < c'$ oder falls $c = c'$ und $n < n'$.

Man kann aus zwei Verschlingungen folgendermaßen eine neue Verschlingung gewinnen: Seien L_1 und L_2 Verschlingungen in den orientierten 3-Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2. Wähle Komponenten $K_1 \subset L_1$ und $K_2 \subset L_2$. Wähle orientierungserhaltende Einbettungen $f_i : D^3 \longrightarrow M_i$ derart, daß $f_i(D^3)$ die Verschlingung L_i in einem zusammenhängenden Bogen auf K_i schneidet und dieser Bogen den Rand von $f_1(D^3)$ tranversal trifft. Wähle einen orientierungsumkehrenden PL-Homöomorphismus $h : S^2 \longrightarrow S^2$ derart, daß h das Urbild des Eintritts- bzw. Austrittspunktes des Schnittes von L_2 mit $f_2(D^3)$ auf den Austritts- bzw Eintrittspunkt des Schnittes von L_1 mit $f_1(D^3)$ abbildet. Verklebe $M_1 - f_i(int(D^3))$ mit $M_2 - f_2(int(D^3))$ entlang des Randes vermöge $f_2 \circ h \circ f_1^{-1}$. Das Ergebnis ist die *Summe der Verschlingungen* $L_i \subset M_i$ entlang der Komponenten K_i und wird mit $L_1 \sharp_{K_1,K_2} L_2 \subset M_1 \sharp M_2$ bezeichent. Man beachte, daß die Summe der Verschlingungen in der zusammenhängenden Summe von M_1 und M_2 lebt. Falls wir andere Einbettungen f_i und einen anderen PL-Homöomorphismus h wählen, so gibt es einen orientierungserhaltenden PL-Homöomorphismus zwischen den entsprechenden Modellen der zusammenhängenden Summe von M_1 und M_2, der die entsprechenden Modelle der Summe von L_1 und L_2 bis auf ambiente Isotopie aufeinander abbildet. Falls M_1 und M_2 gleich S^3 sind und L_1 und L_2 sind Knoten, dann schreiben wir kurz $L_1 \sharp L_2$ für die Summe, die wieder in S^3 liegt. Sie ist in diesem Fall eindeutig bis auf ambiente Isotopie. Man kann entsprechend die *disjunkte Summe* $L_1 \coprod L_2 \subset M_1 \sharp M_2$ definieren, wenn das Bild der Einbettung f_i disjunkt von L_i ist.

Als nächstes führen wir den Begriff der Seifert-Fläche ein. Eine *Homologie-3-Sphäre* M ist eine geschlossene 3-dimensionale Mannigfaltigkeit, deren Homologie mit ganzzahligen Koeffizienten isomorph zu der von S^3 ist.

Definition 2.7 *Eine* Seifert-Fläche *für eine orientierte Verschlingung L in einer Homologie-3-Sphäre M ist eine zusammenhängende kompakte 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit (mit einem bi-Kragen) $S \subset M$ derart, daß $\partial S = L$ als orientierte Mannigfaltigkeiten gilt.*

In dieser Definition und auch im folgenden benutzen wir die folgende Konvention, wie eine Orientierung einer Mannigfaltigkeit M mit Rand ∂M eine Orientierung auf dem Rand ∂M induziert: Der Randoperator $H_{\dim(M)}(M, \partial M) \longrightarrow H_{\dim(\partial M)}(\partial M)$ bildet nämlich die Fundamentalklasse von $(M, \partial M)$ auf die von ∂M ab. Das entspricht der Identifikation $T_x M = \mathbf{R} \times T_x \partial M$ unter Benutzung der nach außen weisenden Normalen von ∂M in M für $x \in \partial M$. Dies ist verträglich mit der Standardorientierung von $\mathbf{R}^2$ und damit von D^2 und der Standardorientierung von S^1 gegen den Uhrzeigersinn.

Wir geben zunächst eine anschauliche Konstruktion einer Seifert-Fläche in dem Fall, daß $M = S^3$ ist: Man wählt ein orientiertes Verschlingungsdiagramm, das die Verschlingung beschreibt, aus. Jeder Kreuzung löst man Orientierungen entsprechend auf. Auf diese Weise erhalten wir schließlich eine Anzahl von disjunkten (orientierten) Kreisen, die man Seifert-Zykeln nennt. Offensichtlich kann man disjunkte in den $\mathbf{R}^3$ eingebettete Kreisscheiben mit diesen Kreisen als Rand finden, indem man die durch die Kreise gegebenen Kreischeiben in der $x - y$-Ebene eventuell ein wenig relativ Rand in die z-Richtung verschiebt. Dabei kann die Orientierung der Kreisscheiben entsprechend der Orientierung der Seifert-Zykeln gewählt werden. Schließlich verkleben wir die Kreisscheiben, indem wir an den Stellen, die den Kreuzungspunkten im Verschlingungsdiagramm entsprechen, entsprechend dem Kreuzungsverlauf einfach getwistete Bänder einkleben.

2.8 Seifert-Zykeln und Seifert-Fläche

Falls M eine Homologie-3-Sphäre ist, erhält man eine Seifert-Fläche durch folgendes Transversalitätsargument: Wähle eine tubulare Umgebung $N(L)$ von L und definiere $M(L) = M - int(N(L))$. Es gilt $H_1(M(L)) \cong H^2(M, L) \cong H^1(L) \cong \mathbf{Z}^r$ wegen Alexander-Dualität. Also gibt es eine Abbildung $f : (M(L), \partial M(L)) \longrightarrow (S^1 \times D^2, S^1 \times S^1)$, deren Einschränkung auf jede Komponente von ∂M einen Homöomorphismus auf $S^1 \times S^1$ induziert und die auf Homologie die durch die Summe der Koordinaten gegebene Abbildung von $\mathbf{Z}^r$ nach $\mathbf{Z}$ induziert. Wenn wir f transversal zu $\{*\} \times D^2$ relativ dem Rand machen, erhalten wir eine Fläche $(F, \partial F)$ mit Kragen. Offensichtlich kann man einen Kragen an ∂F derart ankleben, daß $\partial F = L$ gilt und F einen bi-Kragen hat.

Tatsächlich gibt diese Konstruktion noch mehr als nur eine Seifert-Fläche, sie beschreibt nämlich ein sogenanntes Surgery-Problem, falls L ein Knoten ist. Da M eine 3-Mannigfaltigkeit ist, ist M parallelisierbar, d.h. hat triviales Tangentialbündel. Daher ist M(L) parallelisierbar, und wir können die Abbildung f durch eine Abbildung von Vektorraumbündeln $\hat{f} : TM(L) \longrightarrow (S^1 \times D^2) \times \mathbf{R}^3$ überdecken. Also ist $(f, \partial f) : (F, \partial F) \longrightarrow (D^2, S^1)$ eine Abbildung, die von einer Abbildung der Tangentialbündel überdeckt wird, einen Isomorphismus auf der ganzzahligen Homologie induziert und auf dem Rand einen Homöomorphismus induziert. Daher definiert sie ein Surgery-Hindernis in der relativen quadratischen L-Gruppe $L_2(\mathbf{Z}[\mathbf{Z}] - \mathbf{Z})$. Dies ist eine Invariante des Knotens und macht auch Sinn für höherdimensionale Knoten in parallelisierbaren Homologie-Sphären (siehe [24]).

Schließlich wollen wir den Begriff der Verschlingungszahl aus dem ersten Kapitel auf Homologie-Sphären erweitern und verschiedene Beschreibungen geben. Dazu benötigen wir die *Verschlingungspaarung* für eine orientierte Homologie-3-Sphäre M und einer Untermannigfaltigkeit $X \subset M$.

$$<,>_X : H_1(X) \otimes H_1(M - X) \longrightarrow \mathbf{Z},$$

die als folgende Komposition definiert ist:

$$H_1(X) \otimes H_1(M-X) \xrightarrow{id\times\partial^{-1}} H_1(X) \times H_2(M, M-X) \xrightarrow{\times} H_3(X \times M, X \times (M-X))$$
$$\longrightarrow H_3(M \times M, M \times M - \Delta(M)) \xrightarrow{(\cap[M\times M])^{-1}} H^3(\Delta(M)) \xrightarrow{ev} \mathbf{Z}$$

Dabei ist $\Delta(M)$ die Diagonale, der Isomorphismus ∂ ist der Randoperator in der langen exakten Sequenz des Paares $(M, M-X)$, die Abbildung ev ist die Auswertung bei der Fundamentalklasse $[\Delta(M)]$, die Klasse $[M \times M]$ ist die Fundamentalklasse von $M \times M$, und $\times$ bzw. $\cap$ bezeichen das Kreuz- bzw. das Cap-Produkt.

Definition 2.9 *Seien K_1 und K_2 orientierte disjunkte Knoten in der Homologie-3-Sphäre M. Definiere die* Verschlingungszahl *als*

$$v(K_1, K_2) :=< [K_1], [K_2] >_{K_1} =< [K_2], [K_1] >_{K_2} \qquad \in \mathbf{Z}.$$

Wir stellen ohne Beweis einige der interessanten Eigenschaften der Verschlingungszahl zusammen, die zum Teil auf Gauß zurückgehen:

Lemma 2.10 *Seien K_1 und K_2 orientierte disjunkte Knoten in der Homologie-3-Sphäre M. Sei K_i durch die Einbettung $f_i : S^1 \longrightarrow M$ gegeben. Dann gilt:*

1. *Falls S eine Seifert-Fläche für K_1 ist, dann ist die Verschlingunszahl $v(K_1, K_2)$ die Schnittzahl von S mit K_2 in M. (Dies ist die Summe der Schnittpunkte von S mit K_2, gezählt mit den den lokalen Orientierungen entsprechenden Vorzeichen, nachdem man S transversal zu K_2 gemacht hat);*

2. *Die Verschlingungszahl $v(K_1, K_2)$ ist der Grad der Abbildung*
$$H_1(K_1) \longrightarrow H_1(M-K_2) \xrightarrow{(\cap[M])^{-1}} H^2(M, K_2) \xrightarrow{\delta^{-1}} H^1(K_2);$$

3. *Sei $M = S^3 = \mathbf{R}^3 \coprod\{\infty\}$. Die Abbildung $pr : \mathbf{R}^3 - \{0\} \longrightarrow S^2$ bilde p auf $\frac{p}{|p|}$ ab . Dann ist der Grad der Abbildung $pr \circ (f_1 - f_2) : S^1 \times S^1 \longrightarrow S^2$ gleich der Verschlingungszahl $v(K_1, K_2)$;*

4. *Sei ω die 2-Form auf $\mathbf{R}^3 - \{0\}$, die durch $\omega_p(v, w) = \frac{<v\times w, p>}{4\pi|p|^3}$ gegeben ist. Dann gilt:*
$$v(K_1, K_2) = \int_{S^1\times S^1} (f_1 - f_2)^*\omega;$$

5. *Die Verschlingungszahl $v(K_1, K_2)$ kann man elektrodynamisch interpretieren: Es ist bis auf einen Faktor die Arbeit, die man leisten muß, um einen magnetischen Pol entlang des Knotens K_1 zu bewegen, während K_2 von einem elektrischen Strom durchflossen wird;*

6. *Die Definitionen 1.19 und 2.9 stimmen im Fall $M = S^3$ überein.*

3. Das Alexander-Polynom

Das Alexander-Polynom wurde von Alexander 1928 eingeführt [2]. Es ist immer noch eine der wichtigsten Invarianten in der Knotentheorie. Wir erläutern seine Definition mit Hilfe von Seifert-Flächen.

Sei S eine orientierte Seifert-Fläche der orientierten Verschlingung L in der orientierten Homologie-3-Sphäre M. Wähle eine Riemannsche Metrik auf M und eine Trivialisierung des Normalenbündels $\nu(S, M)$ von S, die mit den Orientierungen von S und M unter der Identifikation $TS \oplus \nu(S, M) = TM|_S$ verträglich ist. Wir erhalten durch die normalen Umgebungen eine Einbettung $i : S \times S^0 \longrightarrow M$. Bezeichne die Einschränkung von i auf $S \times \{\pm 1\}$ mit

$$\begin{aligned} i^+ : S &\longrightarrow M - S; \\ i^- : S &\longrightarrow M - S. \end{aligned}$$

Anschaulich bedeutet $i^\pm$ eine Verschiebung von S in bzw. entgegen der Orientierungsrichtung. Die Isotopieklasse von $i^\pm$ ist unabhängig von der Wahl der Riemannschen Metrik auf M. Die *Seifert-Paarung*

$$s : H_1(S) \times H_1(S) \longrightarrow \mathbf{Z}$$

bildet (u, v) auf die Verschlingungszahl $v(u, i_*^+(v))$ von u und $i_*^+(v)$ in M ab. Wähle eine ganzzahlige Basis $b_1, b_2, \ldots, b_k$ von $H_1(S)$. Definiere die *Seifert-Matrix*

$$A := \left(s(b_i, b_j)\right)_{(i,j=1,k)}.$$

Es ist $A^t = \left(v(b_j, i_*^-(b_i))\right)_{(i,j=1,k)}$, und $A - A^t$ ist die Schnittzahl-Paarung der Seifert-Fläche. Das Polynom $det(t^{-1} \cdot A^t - t \cdot A)$ ist unabhängig von einer speziellen Wahl der Seifertfläche S einer Verschlingung und der Wahl der Basis von $H_1(S)$, wobei A^t die transponierte Matrix ist.

Definition 3.1 *Sei L eine orientierte Verschlingung in der orientierten Homologie-3-Sphäre M. Sei S eine Seifert-Fläche von L in M. Falls S nicht D^2 ist, definiere das* Alexander Polynom *durch*

$$\Delta_L(t) = det(t^{-1} \cdot A^t - t \cdot A).$$

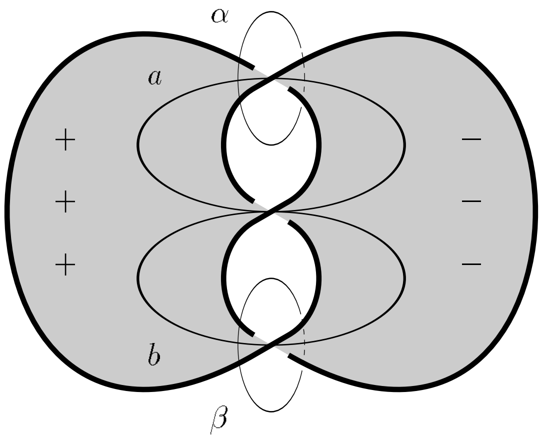
Falls $S = D^2$ gilt, definiere das Alexander-Polynom *durch*

$$\Delta_L(t) = 1.$$

Den Beweis, daß diese Definition nicht von der Seifert-Fläche abhängt, findet man zum Beispiel in [22, S. 192 - S.200]. Wir berechnen zur Illustration das Alexander-Polynom vom Kleeblatt-Knoten und von der Hopf-Verschlingung.

Das folgende Bild zeigt eine Seifert-Fläche für den Kleeblatt-Knoten zusammen mit einer Standardbasis der ersten Homologiegruppe des Komplementes von S in S^3. In der mit $+$ bzw. $-$ gekennzeichneten Region soll das durch die Trivialisierung von $\nu(S, M)$ gegebene Normalenfeld nach vorne bzw. hinten weisen. Man beachte, daß dadurch die Orientierung der Seifert-Fläche und des Knotens festgelegt ist.

3.2

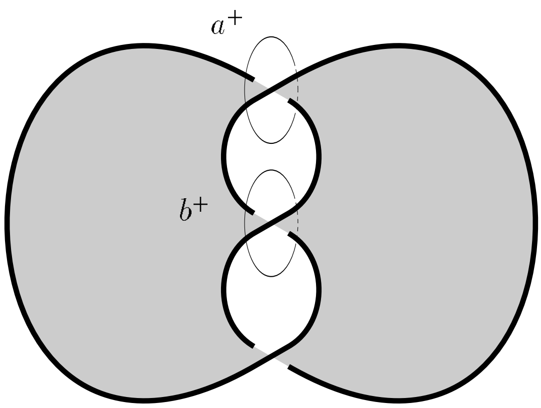


Man berechnet leicht:

$$
\begin{array}{ccccc}
v(a,\alpha) & = & v(b,\beta) & = & 1; \\
v(b,\alpha) & = & v(a,\beta) & = & 0.
\end{array}
$$

Die positiven Normalverschiebungen $a^+ = i^+(a)$ and $b^+ = i^+(b)$ von a und b sehen folgendermaßen aus:

3.3



Also gilt:

$$
\begin{array}{ccc}
a^+ & = & -\alpha; \\
b^+ & = & \alpha - \beta.
\end{array}
$$

Die Seifert-Matrix hat folgende Gestalt:

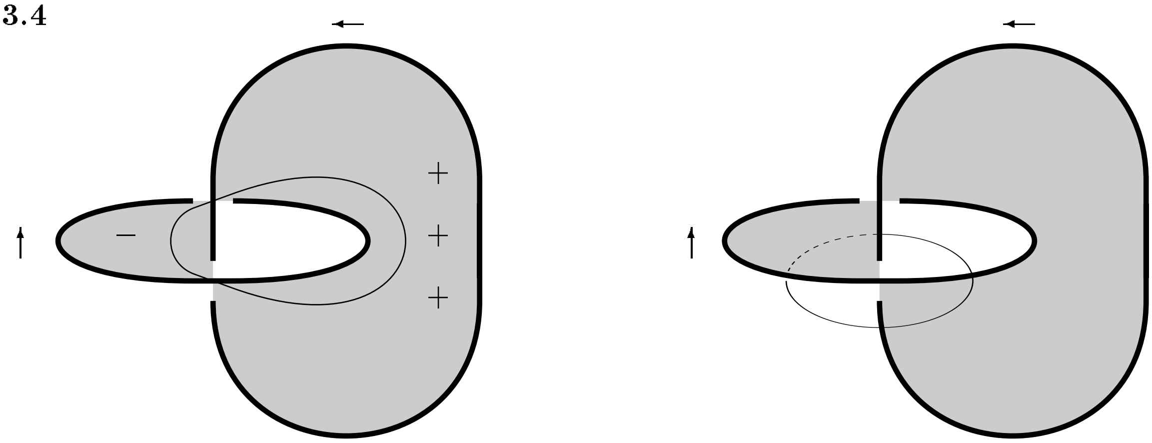
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten für das Alexander Polynoms des Kleeblatt-Knotens T:

$$\Delta_T(t) = t^2 - 1 + t^{-2}.$$

Für die Hopf-Verschlingung erhalten wir folgendes Bild:

3.4



Die Seifert-Matrix ist (1). Man erhält für das Alexander-Polynom der Hopf-Verschlingung H:

$$\Delta_H(t) = t - t^{-1}.$$

Im folgenden Lemma stellen wir ohne Beweis einige der wichtigsten Eigenschaften des Alexander-Polynoms zusammen:

Lemma 3.5 1. *Falls K ein orientierter Knoten in einer Homologie-3-Sphäre ist, so gilt:*

$$\Delta_K(1) = 1;$$

2. *Sei L eine orientierte Verschlingung mit r Komponenten in der orientierten Homologie-3-Sphäre M. Dann ist ihr Alexander-Polynom $(-1)^r$-symmetrisch:*

$$\Delta_L(t) = (-1)^r \cdot \Delta_L(t^{-1});$$

3. *Sei L eine orientierte Verschlingung mit genau zwei Komponenten L_1 und L_2 in der orientierten Homologie-3-Sphäre M. Dann gilt:*

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \Delta_L \bigg|_{t=1} = v(L_1, L_2);$$

4. $\Delta_{K\sharp L} = \Delta_K \cdot \Delta_L$;

5. $\Delta_{K\coprod L} = 0$;

6. $\Delta_L = \Delta_{L^-}$, *wobei man* L^- *aus* L *durch gleichzeitige Orientierungsumkehrung auf allen Komponenten erhält;*

7. $\Delta_K = \Delta_{K^\times}$ *für jeden orientierten Knoten* K, *wobei* $K^\times$ *das Spiegelbild von* K *ist.*

Weitere Informationen zum Alexander-Polynom findet man in jedem Lehrbuch über Knotentheorie. Es sei bemerkt, daß man das Alexander-Polynom einer Verschlingung V in einer Homologie-3-Sphäre M aus der Fundamentalgruppe des Komplementes $M-V$ berechnen kann und es sich auch als die Reidemeister-Torsion der maximalen abelschen Überlagerung des Komplementes interpretieren läßt. Eine explizite Präsentation der Fundamentalgruppe des Komplementes einer Verschlingung in S^3 kann man mit Hilfe des Wirtinger-Kalküls direkt aus einem zugehörigen Verschlingungsdiagramm ablesen. Des weiteren weisen wir darauf hin, daß man die Alexander-Matrix auch als die Darstellungsmatrix von $H_1(\overline{X})$, aufgefaßt als $\mathbf{Z}[t,t^{-1}]$-Modul, interpretieren kann, wobei $\overline{X}$ die unendliche zyklische Überlagerung des Knotenkomplementes sei.

4. Verschlingungen und Zöpfe

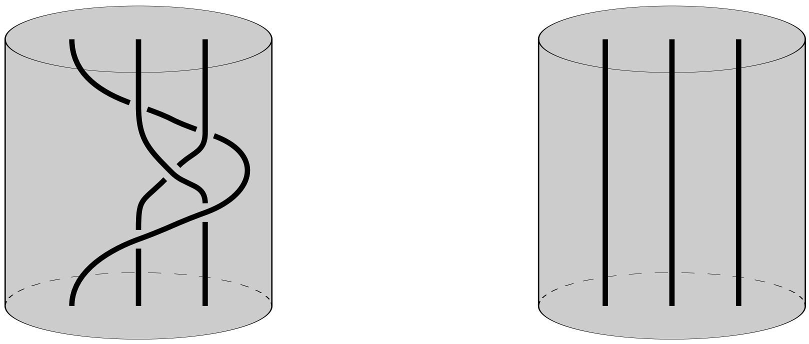
Um später die universelle Entwirrungsinvariante mit Hilfe von Hecke-Algebren zu konstruieren, müssen wir erklären, wie man Verschlingungen als Zöpfe darstellen kann.

Zuerst führen wir die Zopfgruppe B_n ein: Sei P_n eine Menge von n Punkten in D^2. Es bezeichne $[n]$ die Menge mit n Elementen. Ein *Zopf mit n Fäden* oder kurz, ein *n-Zopf*, ist eine Einbettung

$$\beta : [n] \times [0,1] \longrightarrow D^2 \times [0,1],$$

die (k,t) auf $(\widehat{\beta_k}(t), t)$ schickt, so daß $[n] \times \{i\}$ auf $P_n \times \{i\}$ abgebildet wird für i=1,2. Falls $\widehat{\beta_k}$ konstant ist, so erhalten wir den trivialen n-Zopf.

4.1 Nichttrivialer und trivialer Zopf

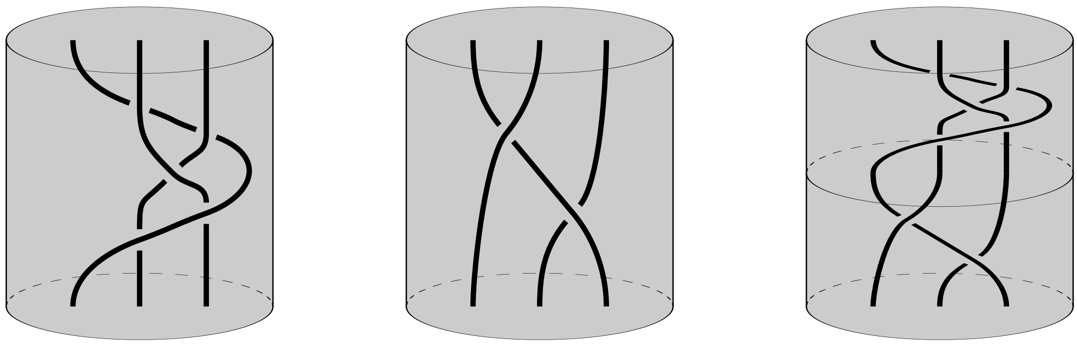


Eine Isotopie I von zwei n-Zöpfen β und γ ist eine Abbildung

$$I : [n] \times [0,1] \times [0,1] \longrightarrow D^2 \times [0,1],$$

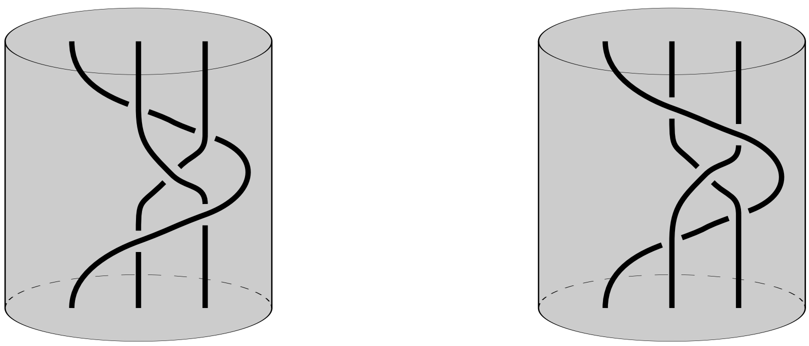
so daß I_s, gegeben durch die Einschränkung von I auf $[n] \times [0,1] \times \{s\}$, ein n-Zopf für alle $s \in [0,1]$ ist. Sei B_n die Menge der Isotopieklassen von n-Zöpfen. Diese Menge wird zu einer Gruppe durch das Zusammenstecken von Zöpfen.

4.2 Zusammenstecken von Zöpfen



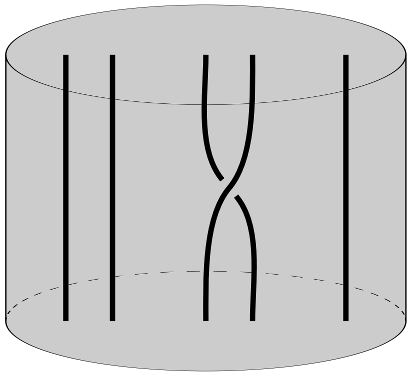
Der triviale Zopf repräsentiert das Einselement. Die Inverse einer Klasse, die β enthält, wird repräsentiert durch β^{-}, den Zopf, den man aus β durch Umkehren der t-Richtung erhält.

4.3 Der inverse Zopf



Sei $\sigma_i \in B_n$ für $1 \leq i < n$ der folgende n-Zopf:

4.4



Satz 4.5 (Artin [3]) *Die Zopfgruppe B_n hat die folgende Präsentation:*

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{c} \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \textit{ für } 1 \leq i, j \leq n-1, \mid i-j \mid \geq 2 \\ \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} = \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i \textit{ für } 1 \leq i \leq n-2 \end{array} \right\rangle$$

Einen Beweis dieses Lemmas findet man in Birman [5]. Wenn wir noch die Relation $\sigma_i\sigma_i = 1$ hinzufügen, erhalten wir eine Präsentation der symmetrischen Gruppe Σ_n der Permutationen von $[n] = \{1, 2, \ldots n\}$. Also gibt es einen Epimorphismus

$$p : B_n \longrightarrow \Sigma_n.$$

Das Bild eines Zopfes unter p ist der Automorphismus von P_n, der ein Element x von P_n auf das Element $p(x)$ abbildet, das mit x durch einen Faden des Zopfes verbunden ist. Man kann sich auch leicht überlegen, daß die n-te Zopfgruppe sich interpretieren läßt als Fundamentalgruppe des sogenannten *Konfigurationsraumes* $C_n(D^2)$ von D^2, der sich durch folgende Definition ergibt:

$$C_n(D^2) = F_n(D^2)/\Sigma_n,$$

wobei

$$F_n(D^2) = \{(x_1, ..., x_n) \in (D^2)^n | x_i \neq x_j, \text{ für } i \neq j\}$$

und Σ_n in üblicher Weise durch Permutation der n-Tupel operiert. Basispunkt ist dann die Äquivalenzklasse von P_n in $C_n(D^2)$.

Man betrachte den Epimorphismus

$$e : B_n \longrightarrow \mathbf{Z},$$

der alle σ_i auf 1 abbildet. Gegeben sei ein Bild eines Zopfes β wie in 4.1. Dann ist $e(\beta)$ die Zahl von Kreuzungen, mit Vorzeichen gezählt. Man prüft leicht nach, daß e die Abelisierung der Zopfgruppe ist.

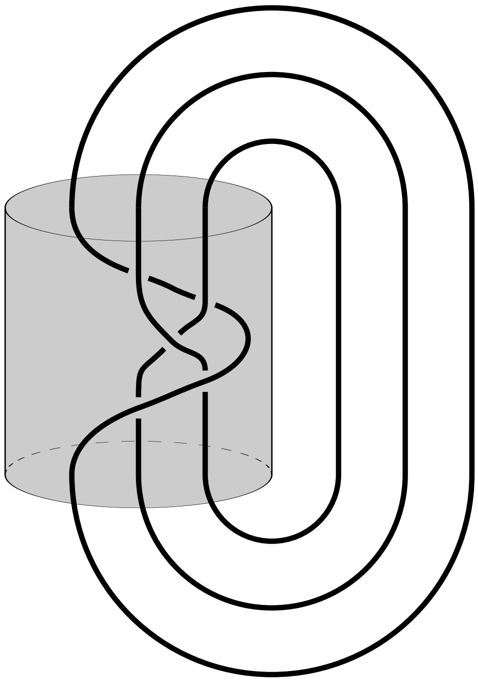
Es gibt eine offensichtliche Inklusion

4.6 $i : B_n \longrightarrow B_{n+1}$,

die durch das Addieren eines trivialen Fadens gegeben ist.

Verschlingungen und Zöpfe stehen in Beziehung durch den sogenannten *Abschluß eines Zopfes*. Insbesondere definiert jeder Zopf β eine Verschlingung $clos(\beta)$ durch die unten beschriebene Konstruktion.

4.7 Abschluß eines Zopfes



Wir erhalten eine Abbildung:

4.8 $clos : \coprod_{n\geq 1} B_n \longrightarrow \{$ ambiente Isotopieklassen von orientierten Verschlingungen in $S^3\}$.

Theorem 4.9 (Alexander) *Die Abbildung clos ist surjektiv.*

Seien $\beta_n \in B_n$ und $\gamma_m \in B_m$ Zöpfe. Wir sagen, γ_m ist das Resultat einer *Markov-Operation vom Typ 1* auf β_n, falls $n = m$ und es ein $\delta_n \in B_n$ gibt, so daß $\gamma_n = \delta_n \beta_n \delta_n^{-1}$ gilt. Falls $m = n+1$ und $\gamma_{n+1} = \beta_n \sigma_n^{\epsilon}$ für ein $\epsilon \in \{\pm 1\}$ gilt, sagen wir, γ_{n+1} ist das Resultat einer Markov-Operation vom Typ 2 auf β_n. Man betrachte eine Folge von Zöpfen $\delta_{n_1}^1, \delta_{n_2}^2, \ldots \delta_{n_r}^r$ so daß $\delta_i^{n_i}$ das Resultat einer Markov-Operation vom Typ 1 oder 2 auf $\delta_{i+1}^{n_{i+1}}$ oder $\delta_{i+1}^{n_{i+1}}$ das Resultat einer Markov-Operation vom Typ 1 oder 2 auf $\delta_i^{n_i}$ ist (für $1 \leq i \leq n-1$). Dann sagen wir, daß $\delta_{n_1}^1$ und $\delta_{n_r}^r$ *durch eine Sequenz von Markov-Operationen in Beziehung stehen.*

Theorem 4.10 (Markov) *Zwei Zöpfe $\beta_n \in B_n$ und $\gamma_m \in B_m$ haben genau dann den gleichen Abschluß wenn sie durch eine Sequenz von Markov-Operationen in Beziehung stehen.*

Beweise der Sätze von Alexander und Markov findet man in Birman [5]. Diese beiden Resultate erlauben es, Konstruktionen für Verschlingungsinvarianten auf die Konstruktion von Zopfinvarianten zurückzuspielen. Der Hauptvorteil der Zöpfe ist es, daß sie im Gegensatz zu den Verschlingungen eine Gruppe bilden. Speziell kann man die verschiedenen Präsentationen der Zopfgruppe untersuchen. Wir werden sehen, daß dies zur Konstruktion des Jones-Polynoms führt. Bevor wir auf die Details eingehen, erklären wir, wie man das Alexander-Polynom mit Hilfe der sogenannten Burau-Präsentation konstruieren kann.

Sei t der Erzeuger der Gruppe $\mathbf{Z}$. Die *Burau-Darstellung* ist der Homomorphismus

$$\psi_n : B_n \longrightarrow Gl(n, \mathbf{Z}[\mathbf{Z}]),$$

der den Erzeuger σ_i auf die Matrix

$$A_i = \begin{pmatrix} E & & & \\ & 1-t & t & \\ & 1 & 0 & \\ & & & E \end{pmatrix}$$

abbildet, wo E die Einheitsmatrix und $(1-t)$ der Eintrag an der Stelle (i,i) ist. Diese Abbildung ist wohldefiniert, da die auftretenden Matrizen die Relationen der Präsentation der Zopf-Gruppe aus Lemma 4.5 erfüllen.

Für die Burau-Darstellung gibt es folgende Interpretation aus der statistischen Mechanik: Angenommen, ein Teilchen bewegt sich entlang der Fäden eines Zopfes β. Wir erlauben nicht, daß ein Teilchen, das sich an einer Kreuzung entlang des unterkreuzenden Zweiges bewegt, auf den überkreuzenden Zweig springt. Umgekehrt fällt jedoch ein Teilchen, das sich entlang des überkreuzenden Zweiges bewegt, mit der Wahrscheinlichkeit t auf den unterkreuzenden Zweig herunter. Dann ist der Eintrag an der Stelle (i,j) in $\psi(\beta)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Teilchen, das am i-ten Punkt startet, am j-ten Punkt endet.

Sei $\epsilon : \oplus_n \mathbf{Z}[\mathbf{Z}] \longrightarrow \mathbf{Z}[\mathbf{Z}]$ die Abbildung, unter der $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ auf $\sum_{i=1}^n x_i$ geht. Der Homomorphismus $\oplus_n \mathbf{Z}[\mathbf{Z}] \longrightarrow \oplus_n \mathbf{Z}[\mathbf{Z}]$, der x auf xA_i abbildet, läßt den Kern von ϵ invariant. Somit gibt es eine induzierte Darstellung $\widetilde{\psi}$, die auf dem Kern von ϵ operiert. Dies ergibt die *reduzierte Burau-Darstellung*

$$\widetilde{\psi}_n : B_n \longrightarrow Gl(n-1, \mathbf{Z}[\mathbf{Z}]).$$

Den Beweis des folgenden Resultates kann man in [7], Proposition 10.20 finden.

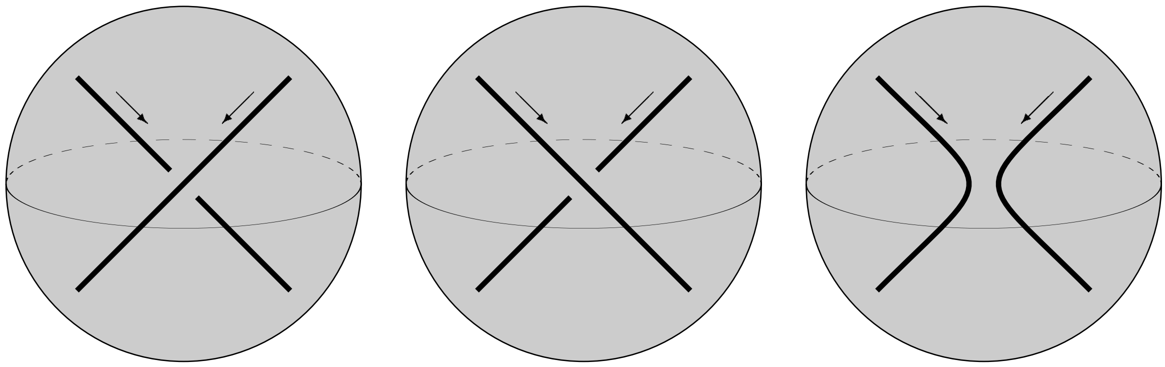
Lemma 4.11 *Sei β_n ein n-Zopf und L die Verschlingung in S^3, gegeben durch $L = clos(\beta_n)$. Dann gilt :*

$$\Delta_L(t) \cdot (1 + t + \ldots t^{n-1}) = det(1 - \widetilde{\psi}_n(\beta_n)).$$

5. Entwirrungs-Invarianten

Seien L_+, L_- und L_0 orientierte Verschlingungen in der orientierten geschlossenen 3-Mannigfaltigkeit M. Wir nennen (L_+, L_-, L_0) ein *Entwirrungs-Tripel* (englisch: skein-triple), falls es einen eingebetteten 3-Ball D^3 in M derart gibt, daß L_+, L_- und L_0 in $M - int(D^3)$ gleich sind und innerhalb von D^3 folgendermaßen aussehen:

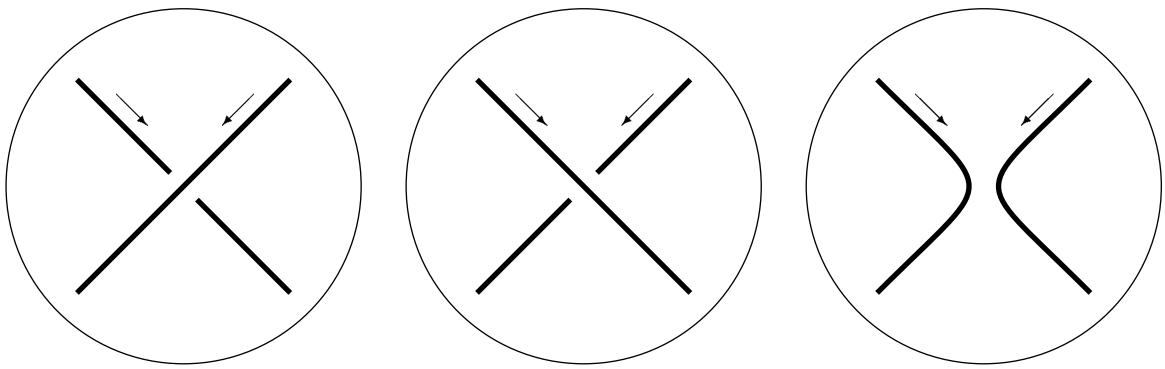
5.1 Entwirrungs-Tripel von orientierten Verschlingungen



L_+ $\qquad$ L_- $\qquad$ L_0

Wir sagen, daß L_+, L_- und L_0 *in Entwirrungs-Relation stehen*, falls (L_+, L_-, L_0) ein Entwirrungs-Tripel ist. Drei orientierte Verschlingungsdiagramme L_+, L_- und L_0 *stehen in Entwirrungs-Relation*, wenn es einen eingebetteten 2-Ball $D^2 \subset \mathbf{R}^2$ derart gibt, daß die Verschlingungsdiagramme außerhalb von D^2 gleich sind und innerhalb von D^2 durch folgende Bilder gegeben sind:

5.2 Entwirrungs-Tripel von orientierten Verschlingungsdiagrammen



L_+ $\qquad$ L_- $\qquad$ L_0

Drei orientierte Verschlingungsdiagramme stehen genau dann in Entwirrungs-Relation, wenn die zugehörigen orientierten Verschlingungen in S^3 in Entwirrungs-Relation stehen. Folgende Definition geht auf Conway [8] zurück:

Definition 5.3 *Eine* Entwirrungs-Invariante *ist eine Abbildung*

$$\gamma : \{\textit{ambiente Isotopieklassen von orientierten Verschlingungen in } S^3\} \longrightarrow R$$

in einen kommutativen assoziativen Ring R mit Eins, die folgende Eigenschaften hat:

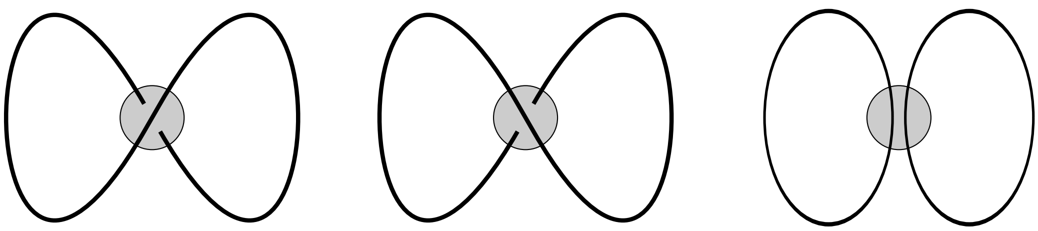
1. *Es gibt Einheiten $a_+, a_-, a_0 \in R^*$, so daß für jedes Entwirrungs-Tripel (L_+, L_-, L_0) die folgende Relation gilt:*

$$a_+ \cdot \gamma(L_+) + a_- \cdot \gamma(L_-) + a_0 \cdot \gamma(L_0) = 0;$$

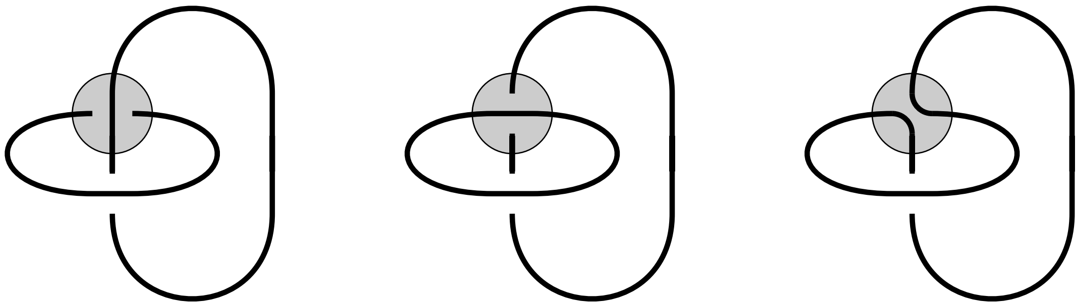
2. *Es ordnet γ dem trivialen Knoten den Wert 1 zu.*

Die Entwirrungs-Relation ist für konkrete Berechnungen geeignet. Man betrachte eine Entwirrungs-Invariante γ mit Entwirrungs-Koeffizienten a_+, a_-, a_0. Sei O^r die triviale Verschlingung mit r Komponenten, H die Hopf-Verschlingung mit Orientierungen, für die die Verschlingungszahl $+1$ ist, und T das rechtshändige Kleeblatt mit irgendeiner Orientierung. Die folgenden Rechnungen ändern sich nicht, wenn man die Orientierungen auf den Komponenten von H gleichzeitig umkehrt oder die Orientierung auf T ändert. Für eine gegebene Verschlingung L bezeichne $L^\times$ ihr Spiegelbild, d.h. das Bild von L unter einem orientierungsumkehrenden Homöomorphismus $S^3 \longrightarrow S^3$. Wenn L durch ein Verschlingungsdiagramm gegeben ist, dann bekommt man ein Verschlingungsdiagramm für $L^\times$ durch Vertauschen aller Kreuzungen. Man erhält leicht aus den folgenden Entwirrungs-Relationen:

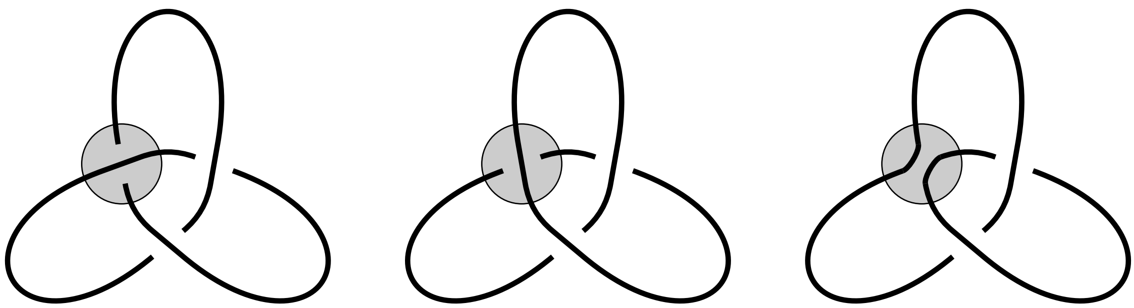
5.4



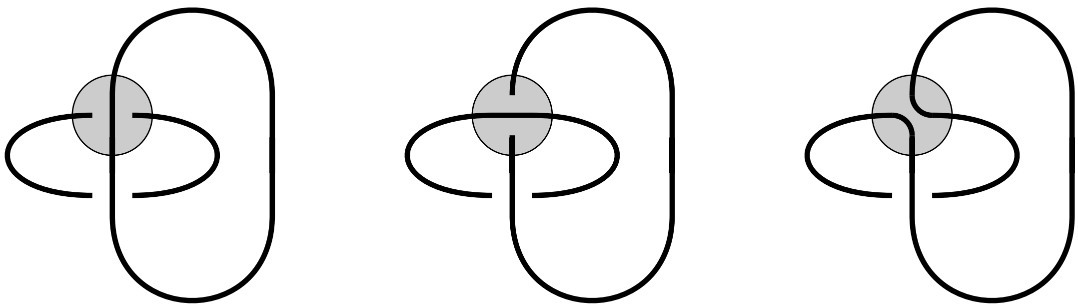
5.5



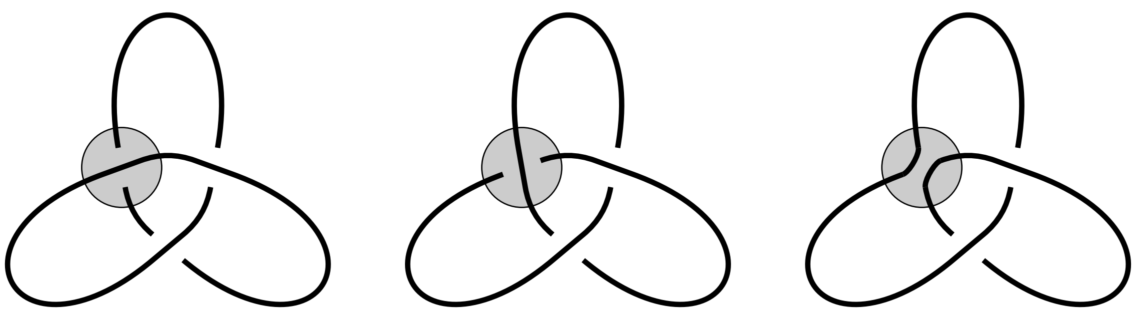
5.6



5.7



5.8



$$\begin{aligned}
\gamma(O^2) &= -a_+a_0^{-1} - a_-a_0^{-1}; \\
\gamma(H) &= a_-a_0^{-1} + a_+^{-1}a_-^2a_0^{-1} - a_+^{-1}a_0; \\
\gamma(T) &= -2a_+^{-1}a_- - a_+^{-2}a_-^2 + a_+^{-2}a_0^2; \\
\gamma(H^\times) &= a_+a_0^{-1} + a_+^2a_-^{-1}a_0^{-1} - a_-^{-1}a_0; \\
\gamma(T^\times) &= -2a_+a_-^{-1} - a_+^2a_-^{-2} + a_-^{-2}a_0^2.
\end{aligned}$$

Lemma 5.10 *Sei*

$$\gamma : \{\textit{ambiente Isotopieklassen von orientierten Verschlingungen in } S^3\} \longrightarrow R$$

eine Entwirrungs-Invariante. Dann gilt:

1. *Es ist γ durch die Entwirrungs-Koeffizienten vollständig bestimmt;*
2. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
   (a) *Es gibt für γ Entwirrungs-Koeffizienten a_+, a_-, a_0, die $a_+ + a_- + a_0 = 0$ erfüllen;*
   (b) $\gamma(O^2) = 1$;
   (c) $\gamma(L) = 1$ *für alle orientierten Verschlingungen L;*
3. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
   (a) *Es gibt für γ Entwirrungs-Koeffizienten a_+, a_-, a_0, die $a_+ + a_- - a_0 = 0$ erfüllen;*
   (b) $\gamma(O^2) = -1$;
   (c) $\gamma(L) = (-1)^{r(L)+1}$ *für alle orientierten Verschlingungen L, wobei $r(L)$ die Anzahl von Komponenten ist;*
4. *Die Entwirrungs-Koeffizienten von γ erfüllen:*
$$\begin{aligned}
a_+ \cdot (\gamma(H) - \gamma(O^2)) &= a_0 \cdot (\gamma(O^2)^2 - 1); \\
a_- &= -a_+ - a_0 \cdot \gamma(O^2);
\end{aligned}$$
5. *Angenommen, R habe keine Nullteiler. Dann ist γ durch die Werte $\gamma(O^2)$ und $\gamma(H)$ festgelegt. Die Werte bestimmen außerdem die Entwirrungs-Koeffizienten bis auf gemeinsame Multiplikation mit einer Einheit, vorausgesetzt, daß $\gamma(O^2) \notin \{\pm 1\}$ gilt.*

Beweis : 1.) folgt durch Induktion über die Komplexität, denn man kann für ein gegebenes Verschlingungsdiagramm ein Entwirrungs-Tripel finden, das dieses Verschlingungsdiagramm enthält und dessen andere Verschlingungsdiagramme kleinere Komplexität haben.

2.) erhalten wir aus dem Entwirrungs-Tripel 5.4 und dann erneut durch Induktion über die Komplexität.

3.) folgt aus der Beobachtung, daß $r(L_+) = r(L_-) = r(L_0) \pm 1$ für jedes Entwirrungs-Tripel

L_+, L_-, L_0 gilt.

4.) folgt aus 5.9.

5.) folgt aus 1.) bis 4.).

Definition 5.11 *Eine Entwirrungs-Invariante*

$$\Gamma : \{\textit{ambiente Isotopieklassen von orientierten Verschlingungen in } S^3\} \longrightarrow R$$

heißt universelle Entwirrungs-Invariante, *wenn es für jede Entwirrungs-Invariante*

$$\gamma : \{\textit{ambiente Isotopieklassen von orientierten Verschlingungen in } S^3\} \longrightarrow S$$

einen Ringhomomorphismus $\Phi : R \longrightarrow S$ gibt, so daß $\gamma = \Phi \circ \Gamma$ gilt.

Ein Resultat wird sein, daß eine universelle Entwirrungs-Invariante überhaupt existiert, nämlich das Jones-Polynom in zwei Variablen. Bevor wir die universelle Entwirrungs-Invariante konstruieren, wollen wir ihre Haupteigenschaften, die aus ihrer universellen Eigenschaft folgen, betrachten. Man beachte, daß wir in der Definition der universellen Entwirrungs-Invarianten keine Eindeutigkeit für den Homomorphismus Φ verlangen.

Lemma 5.12 *Angenommen, es gibt eine Entwirrungs-Invariante*
$\Gamma : \{\textit{ambiente Isotopieklassen von orientierten Verschlingungen in } S^3\} \longrightarrow \mathbf{Z}[a_+, a_+^{-1}, a_-, a_-^{-1}, a_0, a_0^{-1}]$,
so daß a_+, a_-, a_0 Entwirrungs-Koeffizienten sind. Dann gilt:

1. *Γ ist eine universelle Entwirrungs-Invariante;*
2. *Sei δ eine Entwirrungs-Invariante mit Werten in R, so daß $\delta(O^2) \notin \{\pm 1\}$. Seien ϕ und ψ Homomorphismen von $\mathbf{Z}[a_+, a_+^{-1}, a_-, a_-^{-1}, a_0, a_0^{-1}]$ nach R. Es gelte $\phi \circ \Gamma = \delta$, und R habe keine Nullteiler. Dann gilt $\psi \circ \Gamma = \delta$ genau dann, wenn es eine Einheit $u \in R$ derart gibt, daß gilt:*

$$\begin{aligned} u \cdot \phi(a_+) &= \psi(a_+); \\ u \cdot \phi(a_-) &= \psi(a_-); \\ u \cdot \phi(a_0) &= \psi(a_0); \end{aligned}$$

3. *$\Gamma(L)$ ist ein nicht-triviales homogenes Polynom von Totalgrad 0;*
4. *$\Gamma(L) = \Gamma(L^-)$, wobei man L^- aus L durch gleichzeitige Orientierungsumkehrung auf den einzelnen Komponenten erhält;*
5. *$\Gamma(L^\times)(a_+, a_-, a_0) = \Gamma(L)(a_-, a_+, a_0)$;*
6. *$\Gamma(K \coprod L) = \Gamma(K) \cdot \Gamma(L) \cdot \frac{-a_0}{a_+ + a_-}$;*

7. $\Gamma(K\sharp L) = \Gamma(K)\cdot\Gamma(L)$.

<u>**Beweis**</u> : 1.) Zu einer Entwirrungs-Invarianten γ mit Werten in R und Entwirrungs-Koeffizienten $\alpha_+, \alpha_-, \alpha_0$ definieren wir $\Phi : \mathbf{Z}[a_+, a_+^{-1}, a_-, a_-^{-1}, a_0, a_0^{-1}] \longrightarrow R$, indem wir a_+ auf α_+, a_- auf α_- und a_0 auf α_0 abbilden. Mit Induktion über die Komplexität der Verschlingung erhält man $\gamma = \phi \circ \Gamma$.

2.) folgt aus Lemma 5.10.

3.) Die Homogenität beweist man durch Induktion über die Komplexität der Verschlingung. Da die triviale Invariante mit konstantem Wert 1 eine Entwirrungsinvariante nach Lemma 5.10 ist, ist $\Gamma(L)$ niemals 0.

4.) - 7.) Die folgenden Abbildungen sind Entwirrungs-Invarianten mit Werten im Quotientenkörper von $\mathbf{Z}[a_+, a_+^{-1}, a_-, a_-^{-1}, a_0, a_0^{-1}]$ und Entwirrungs-Koeffizienten a_+, a_-, a_0:

$$\begin{aligned}
L &\mapsto \Gamma(L^-);\\
L &\mapsto \Gamma(K \textstyle\coprod L)\cdot\Gamma(K)^{-1}\cdot\Gamma(O^2)^{-1};\\
L &\mapsto \Gamma(K\sharp L)\cdot\Gamma(K)^{-1};\\
L &\mapsto \Gamma(L^\times)(a_-, a_+, a_0).
\end{aligned}$$

Nun wendet man Lemma 5.10.5 an.

Wenn die Entwirrungs-Invariante Γ existiert, erhalten wir aus 5.9, daß der Kleeblatt-Knoten und sein Spiegelbild nicht ambient isotop sind. Man beachte, daß das Alexander-Polynom einen Knoten nicht von seinem Spiegelbild unterscheiden kann.

Eine Entwirrungsinvariante kann einen orientierten Knoten K nicht von K^- unterscheiden. Es sei aber bemerkt, daß es orientierte Knoten K gibt, für die K und K^- nicht äquivalent sind [37].

Mit Blick auf das Lemma 5.12 könnte man erwarten, daß es auch eine Version von Γ in zwei Variablen gibt. Dies zeigt das folgende Lemma, das durch Induktion über die Komplexität bewiesen wird.

Lemma 5.13 *Angenommen, es gibt eine Entwirrungs-Invariante*

$J : \{$*amb. Isotopieklassen von orient. Verschl. in* $S^3\} \longrightarrow \mathbf{Z}[l, l^{-1}, m, m^{-1}]$,

so daß l, l^{-1}, m *Entwirrungs-Koeffizienten sind. Sei* L *irgendeine Verschlingung, dann ist* $J(L)$ *eine Summe aus Monomen* $r_{a,b}\cdot l^a \cdot m^b$ *für* $r_{a,b}\in R$, *so daß* $a+b$ *gerade ist. Also können wir*

$$\Gamma(L) \in \mathbf{Z}[a_+, a_+^{-1}, a_-, a_-^{-1}, a_0, a_0^{-1}]$$

definieren durch

$$\Gamma(L)(a_+, a_-, a_0) := J(L)(a_+^{1/2}\cdot a_-^{-1/2}, a_0\cdot a_+^{-1/2}\cdot a_-^{-1/2}).$$

Dann ist Γ *eine Entwirrungs-Invariante mit Entwirrungs-Koeffizienten* a_+, a_-, a_0.

Wir haben bereits zwei Beispiele für Entwirrungsinvarianten gesehen, nämlich das Alexander-Polynom und das Jones-Polynom.

Lemma 5.14 *Sei* (L_+, L_-, L_0) *ein Entwirrungs-Tripel. Dann gilt für das Alexander-Polynom*

$$\Delta_{L_+} - \Delta_{L_-} - (t - t^{-1}) \cdot \Delta_{L_0} = 0$$

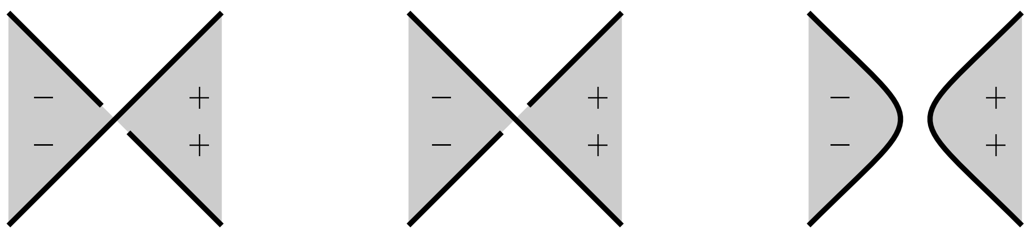
und für das Jones-Polynom

$$A^4 \cdot J_{L_+} - A^{-4} \cdot J_{L_-} + (A^2 - A^{-2}) \cdot J_{L_0} = 0.$$

Beweis : Die Behauptung für das Jones Polynom folgt im wesentlichen aus Satz 1.12. Es bleibt die Aussage für das Alexander-Polynom zu beweisen.

Wir können Seifert-Flächen S_+, S_- and S_0 für L_+, L_- und L_0 derart finden, daß sie außerhalb eines eingebetteten 3-Balles D^3 gleich sind und innerhalb von D^3 folgendermaßen aussehen:

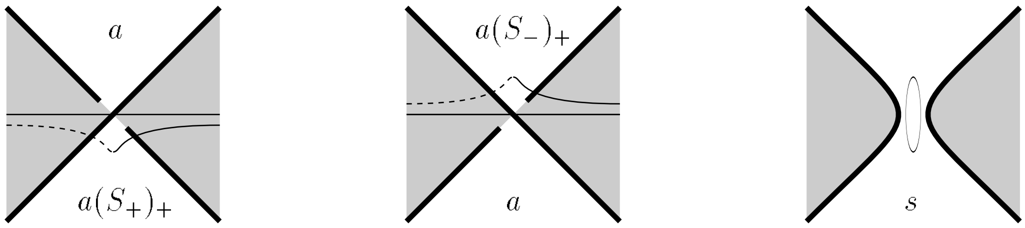
5.15 Seifert-Flächen für ein Entwirrungs-Tripel



S_+ S_- S_0

Wir erhalten S_+ und S_- aus S_0 jeweils durch Ankleben eines 1-Henkels $D^1 \times D^1$ an den Rand. Also gibt es eine Schleife a in $S_+ \cap S_-$, so daß $H_1(S_\pm) = <a> \oplus H_1(S_0)$ gilt. Seien $a(S_+)_+$ und $a(S_-)_+$ die positiven Normalenverschiebungen von a für S_+ und S_-. Diese Schleifen sehen folgendermaßen aus:

5.16



Die Schleife $s \subset D^3 \subset M$ erfüllt $v(s,a) = -1$ und $a(S_+)_+ - a(S_-)_+ = s$. Demnach können wir Seifert-Matrizen V_+,V_- und V_0 derart finden, daß gilt:

$$
\begin{aligned}
V_+ &= V_- + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\
V_- &= \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & V_0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Man berechnet:

$$
\begin{aligned}
\Delta_{L_+} - \Delta_{L_-} &= det(t^{-1} \cdot V_+^t - t \cdot V_+) - det(t^{-1} \cdot V_-^t - t \cdot V_-) \\
&= -(t^{-1} - t) \cdot det(t^{-1} \cdot V_0^t - t \cdot V_0) = (t - t^{-1}) \cdot \Delta_{L_0}.
\end{aligned}
$$

6. Die Konstruktion der universellen Entwirrungs-Invarianten mit Hilfe von Hecke-Algebren

Wir wollen nun die Entwirrungs-Invariante J, so wie sie in Lemma 5.13 beschrieben ist, konstruieren. Die Sätze von Alexander 4.9 und Markov 4.10 und die Berechnung des Alexander-Polynoms aus der Burau-Darstellung in Lemma 4.11 legen folgende Strategie für die Konstruktion von Verschlingungsinvarianten nahe: Man finde eine Darstellung der Zopf-Gruppe zusammen mit einer daraus konstruierten Zopfinvarianten, die invariant unter Markov-Operationen ist. Da die erste Markov-Operation durch Konjugieren gegeben ist, ist es naheliegend, hierfür eine Spur zu verwenden. Ein natürlicher Kandidat dafür sind Hecke-Algebren zusammen mit einer Spur, wie sie im folgenden beschrieben ist.

Sei K ein Körper und $q \in K$ ein Element in diesem Körper. Die *Hecke-Algebra* $H_n = H_n(K,q)$, assoziiert zu K und q für $n \geq 2$, ist die assoziative K-Algebra mit Einselement 1, die von T_1,T_2 ... T_{n-1} erzeugt wird unter den folgenden Relationen:

6.1

$$\begin{array}{lcll} T_iT_j & = & T_jT_i & \text{für } 1 \leq i,j \leq n-1 \text{ und } \mid i-j \mid \geq 2; \\ T_iT_{i+1}T_i & = & T_{i+1}T_iT_{i+1} & \text{für } 1 \leq i < n; \\ T_i^2 & = & (1-q)T_i + q & \text{für } 1 \leq i < n. \end{array}$$

Für $n = 1$ setze $H_1(K,q) := K$. Man sieht, daß es eine natürliche Abbildung $H_{n-1} \longrightarrow H_n$ von K-Algebren gibt. Insbesondere wird H_n zu einem H_{n-1}-H_{n-1}-Bimodul. Ein wichtiges Beispiel für eine Hecke-Algebra ist der Gruppenring der symmetrischen Gruppe Σ_n, die die Hecke-Algebra $H_n(K,1)$ ist. Das wichtigste technische Resultat ist:

Lemma 6.2 *Es gibt einen Isomorphismus von H_n-H_n-Bimoduln*

$$\phi : H_n \oplus \Big(H_n \otimes_{H_{n-1}} H_n\Big) \longrightarrow H_{n+1},$$

der $a + \sum_i b_i \otimes c_i$ auf $a + \sum_i b_i T_n c_i$ abbildet.

Zuerst zeigen wir, daß ϕ wohldefiniert ist. Dazu müssen wir zeigen, daß für $u \in H_{n-1}$ und $b, c \in H_n$ buT_nc und bT_nuc übereinstimmen. u ist jedoch eine Linearkombination von Monomen aus T_1,T_2, ... T_{n-2} und all diese Elemente vertauschen mit T_n.

Mit Induktion über n ist ebenfalls leicht zu sehen, daß ϕ surjektiv ist. Es reicht mit Induktion über n zu zeigen, daß jedes Element $x \in H_{n+1}$ als Linearkombination von Monomen in den T_i geschrieben werden kann, so daß T_n nur einmal darin auftaucht. Wir verringern das Auftreten von T_n folgendermaßen: Man betrachte $x = y_1T_ny_2T_ny_3$, so daß T_n nicht in y_i enthalten ist. Falls y_2 T_{n-1} nicht enthält, dann verringert die Anwendung der ersten und dritten Relation aus 6.1 die Anzahl des Auftretens von T_n. Nach Induktionsvoraussetzung können wir also annehmen, daß T_{n-1} genau einmal in y_2 erscheint. Aufgrund der ersten Relation können wir annehmen, daß $y_2 = T_{n-1}$ ist. Nun verringert die Anwendung der zweiten Relation die Anzahl des Auftretens von T_n. Das zeigt die Surjektivität.

Angenommen, es sei $dim_K(H_n) = n!$. Dann ist die Dimension von Definitions- und Bildraum von ϕ gleich, also ist ϕ ein Isomorphismus. Den Beweis von $dim_K(H_n) = n!$ kann man in [13, section 4] finden. Dort wird explizit eine Menge B in H_n und eine Algebrenabbildung $L : H_{n+1} \longrightarrow End_K(K[\Sigma_{n+1}])$ konstruiert, deren Komposition mit der Auswertung auf 1 eine K-lineare Abbildung $H_n \longrightarrow K[\Sigma_{n+1}]$ definiert, die B bijektiv auf Σ_n abbildet.

Es gibt eine kanonische Darstellung

6.3 $\rho_{n+1} : B_{n+1} \longrightarrow H_{n+1} \qquad \sigma_i \mapsto T_i.$

Die Idee ist nun, eine Spur auf der Hecke-Algebra zu konstruieren und dann eine Zopfinvariante zu definieren, indem man die Spur auf das Bild des Zopfes unter ρ anwendet. Dies würde die erste Markov-Operation respektieren, da die Spur unter Konjugation invariant ist. Für die zweite Markov-Operation braucht man eine gute Kontrolle über die Spur von aT_n für $a \in H_n$. Mit Blick auf Lemma 6.2 ist es sinnvoll, induktiv bezüglich n Spuren tr_n auf H_n zu definieren, so daß $tr_{n+1}(aT_nb)$ durch a,b und die Spur tr_n ausgedrückt werden kann. In der Tat gilt folgendes

Lemma 6.4 *Sei K ein Körper, und q, z seien Elemente aus K. Sei H_n die Hecke-Algebra $H_n(K, q)$. Dann gibt es K-lineare Abbildungen*

$$tr_n : H_n \longrightarrow K$$

mit folgenden Eigenschaften:

1. *tr_{n+1} eingeschränkt auf H_n ist tr_n;*
2. *$tr_n(1) = 1$;*
3. *$tr_n(ab) = tr_n(ba)$;*
4. *$tr_{n+1}(aT_nb) = ztr_n(ab) \qquad$ für $a, b \in H_n$.*

Die Abbildungen tr_n sind durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt.

Den elementaren Beweis dieses Lemmas kann man in [13, section 5] finden.

Unser erster Versuch, eine Verschlingungsinvariante zu definieren, ist:

$$\widehat{J}(\beta_n) = tr_n(\rho_n(\beta_n)) \qquad \text{für } \beta \in B_n.$$

Wir müssen das Transformationsverhalten unter den beiden Markov-Operationen untersuchen. Die erste verändert die Invariante nicht:

$$tr_n(\rho_n(\beta_n)) = tr_n(\rho_n(\gamma_n\beta_n\gamma_n^{-1})).$$

Im zweiten Fall erhalten wir für $\beta_n \in B_n$ und den Erzeuger $\sigma_n \in B_{n+1}$

$$\begin{aligned} tr_{n+1}(\rho_{n+1}(\beta_n\sigma_n)) &= z \cdot tr_n(\rho_n(\beta_n)); \\ tr_{n+1}(\rho_{n+1}(\beta_n\sigma_n^{-1})) &= w \cdot tr_n(\rho_n(\beta_n)), \end{aligned}$$

wobei $w := \frac{1}{q}(z+q-1)$. Man beachte, daß aufgrund der dritten Relation in der Definition 6.1 $T_i^{-1} = \frac{1}{q}(T_i+q-1)$ gilt. Somit wandeln wir unseren ersten Versuch folgendermaßen ab: Für noch zu spezifizierende Abbildungen

$$\begin{aligned} a_n : B_n &\longrightarrow \mathbf{Z}; \\ b_n : B_n &\longrightarrow \mathbf{Z} \end{aligned}$$

setzen wir

$$\widehat{J}(\beta_n) = z^{a_n(\beta_n)} \cdot w^{b_n(\beta_n)} \cdot tr_n(\rho_n(\beta_n)).$$

Dann ist $\widehat{J}$ invariant unter den Markov-Bewegungen, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} a_n(\gamma_n\beta_n\gamma_n^{-1}) &= a_n(\beta_n); \\ b_n(\gamma_n\beta_n\gamma_n^{-1}) &= b_n(\beta_n); \\ a_{n+1}(\beta_n\sigma_n) &= a_n(\beta_n) - 1; \\ b_{n+1}(\beta_n\sigma_n) &= b_n(\beta_n); \\ a_{n+1}(\beta_n\sigma_n^{-1}) &= a_n(\beta_n); \\ b_{n+1}(\beta_n\sigma_n^{-1}) &= b_n(\beta_n) - 1. \end{aligned}$$

Unsere Invariante soll der trivialen Verschlingung den Wert 1 zuweisen. Da die triviale Verschlingung durch den Zopf σ_1 gegeben ist, fordern wir also:

$$\begin{aligned} a_2(\sigma_1) &= -1; \\ b_2(\sigma_1) &= 0. \end{aligned}$$

Man sieht leicht, daß folgende Abbildungen diese Eigenschaften haben:

$$\begin{aligned} a_n(\beta_n) &= \frac{1}{2} \cdot (-e(\beta_n) - n + 1); \\ b_n(\beta_n) &= \frac{1}{2} \cdot (e(\beta_n) - n + 1), \end{aligned}$$

wobei $e : B_n \longrightarrow \mathbf{Z}$ den Erzeuger σ_i auf 1 abbildet. Also können wir für eine Verschlingung L in S^3 definieren:

6.5 $\widehat{J}(L) = z^{(-e(\beta_n)-n+1)/2} \cdot w^{(e(\beta)-n+1)/2} \cdot tr_n(\rho_n(\beta_n))$,

wobei β_n irgendein Zopf ist, der L als Abschluß hat.

Nun treffen wir eine spezielle Wahl für den Körper K. Sei $\mathbf{C}(q,z)$ der rationale Funktionenkörper über $\mathbf{C}$ in zwei unabhängigen Variablen q und z. Sei K die Erweiterung, die man durch Hinzufügen der Wurzeln $\sqrt{q}$ und $\sqrt{z/w}$ erhält. Nun nehmen wir H_n über K, und es seien q und z die durch die Variablen q und z in K gegebenen Elemente.

Lemma 6.6 *Sei* (L_+, L_-, L_0) *ein Entwirrungs-Tripel von orientierten Verschlingungen in* S^3. *Definiere Elemente* l *und* m *in* K *durch*

$$\begin{aligned} l &= iz^{1/2}w^{-1/2}q^{-1/2}; \\ m &= i(q^{1/2} - q^{-1/2}). \end{aligned}$$

Dann erhalten wir

$$l \cdot \widehat{J}(L_+) + l^{-1} \cdot \widehat{J}(L_-) + m \cdot \widehat{J}(L_0) = 0.$$

__Beweis__ : Wir können positive ganze Zahlen k und n, sowie Zöpfe β und γ in B_n finden, so daß $k \leq n-1$ und die Abschlüsse der Zöpfe $\alpha_+ = \beta\sigma_k\gamma$, $\alpha_- = \beta\sigma_k^{-1}\gamma$ und $\alpha_0 = \beta\gamma$ L_+, L_- und L_0 sind. Nun kann man auf Hecke-Algebren-Niveau berechnen:

$$\begin{aligned}
& l \cdot z^{(-e(\alpha_+)-n+1)/2} \cdot w^{(e(\alpha_+)-n+1)/2} \cdot \rho_n(\alpha_+) + l^{-1} \cdot z^{-(e(\alpha_-)-n+1)/2} \cdot w^{(e(\alpha_-)-n+1)/2} \cdot \rho_n(\alpha_-) \\
& \qquad + m \cdot z^{(-e(\alpha_0)-n+1)/2} \cdot w^{(e(\alpha_0)-n+1)/2} \cdot \rho_n(\alpha_0) \\
&= l \cdot z^{-1/2} \cdot w^{1/2} \cdot z^{(-e(\alpha_0)-n+1)/2} \cdot w^{(e(\alpha_0)-n+1)/2} \cdot \rho_n(\beta) T_k \rho_n(\gamma) \\
& \qquad + l^{-1} \cdot z^{1/2} \cdot w^{-1/2} \cdot z^{(-e(\alpha_0)-n+1)/2} \cdot w^{(e(\alpha_0)-n+1)/2} \cdot \rho_n(\beta) T_k^{-1} \rho_n(\gamma) \\
& \qquad + m \cdot z^{(-e(\alpha_0)-n+1)/2} \cdot w^{(e(\alpha_0)-n+1)/2} \cdot \rho_n(\beta)\rho_n(\gamma) \\
&= \rho_n(\beta) \cdot \Big(l \cdot z^{-1/2} \cdot w^{1/2} \cdot T_k + l^{-1} \cdot z^{1/2} \cdot w^{-1/2} \cdot q^{-1} \cdot (T_k + q - 1) + m \Big) \rho_n(\gamma).
\end{aligned}$$

Aufgrund der folgenden Gleichungen, die man leicht nachprüft, stellt sich heraus, daß dieser Ausdruck Null ist:

$$\begin{aligned} l \cdot z^{-1/2} \cdot w^{1/2} + l^{-1} \cdot z^{1/2} \cdot w^{-1/2} \cdot q^{-1} &= 0; \\ l^{-1} \cdot z^{1/2} \cdot w^{-1/2} \cdot q^{-1} \cdot (q-1) + m &= 0. \end{aligned}$$

Nun wenden wir tr_n auf die obigen Gleichungen an, und es folgt die Behauptung.

Es gibt eine Einbettung von Algebren $\Psi : \mathbf{Z}[l, l^{-1}, m, m^{-1}] \longrightarrow K$, die l auf l abbildet und ebenso l^{-1},m und m^{-1}. Wenn zwei der Elemente $\widehat{J}(L_+)$, $\widehat{J}(L_-)$ und $\widehat{J}(L_0)$ im Bild von ψ liegen, dann nach Lemma 6.6 auch das dritte. Da nach Konstruktion $\widehat{J}(O) = 1$ gilt, zeigen wir durch Induktion über die Komplexität der Verschlingung, daß $\widehat{J}(L)$ für alle orientierten Verschlingungen in S^3 im Bild von Ψ liegt.

Definition 6.7 *Sei* L *eine orientierte Verschlingung in* S^3. *Das* Jones-Polynom in zwei Variablen

$$J(L) \in \mathbf{Z}[l, l^{-1}, m, m^{-1}]$$

ist definiert als $\Psi(J(L)) = \widehat{J}(L)$.

Aus Lemma 5.13 und Lemma 6.6 erhalten wir:

Theorem 6.8 *Das Jones-Polynom in zwei Variablen ist eine Entwirrungs-Invariante mit Entwirrungs-Koeffizienten* l, l^{-1}, m. *Es ist eine universelle Entwirrungs-Invariante.*

7. Schlußbemerkungen

Ursprünglich wurde das Jones-Polynom in nur einer Variablen eingeführt. So ist das Jones-Polynom, wie es von Jones [16], [17], [18], [19] konstruiert wurde, eine Entwirrungs-Invariante mit Entwirrungs-Koeffizienten $t, -t^{-1}, (t^{1/2} - t^{-1/2})$. Es tauchte bei Untersuchungen über von Neumann-Algebren auf, bei denen gewisse Projektionen auftreten, deren Vertauschungseigenschaften ähnlich zur Präsentation der Zopf-Gruppe sind (siehe Lemma 4.5). Einige Monate später entdeckten vier Gruppen unabhängig voneinander, daß das Polynom in einer Variablen von Jones zu einer universellen Entwirrungs-Invarianten verallgemeinert werden kann (siehe Freyd, P. und Yetter, D.; Hoste, J.; Lickorish, W.B.R. und Millet, K.; Ocneanu, A. in [11]). Der Ansatz mittels Hecke-Algebren stammt von Ocneanu. Das Jones-Polynom in zwei Variablen wird zu Ehren seiner Entdecker auch HOMFLY-Polynom genannt. Unter anderem für die Entdeckung des Jones-Polynoms erhielt Jones 1990 die Fields-Medaille.

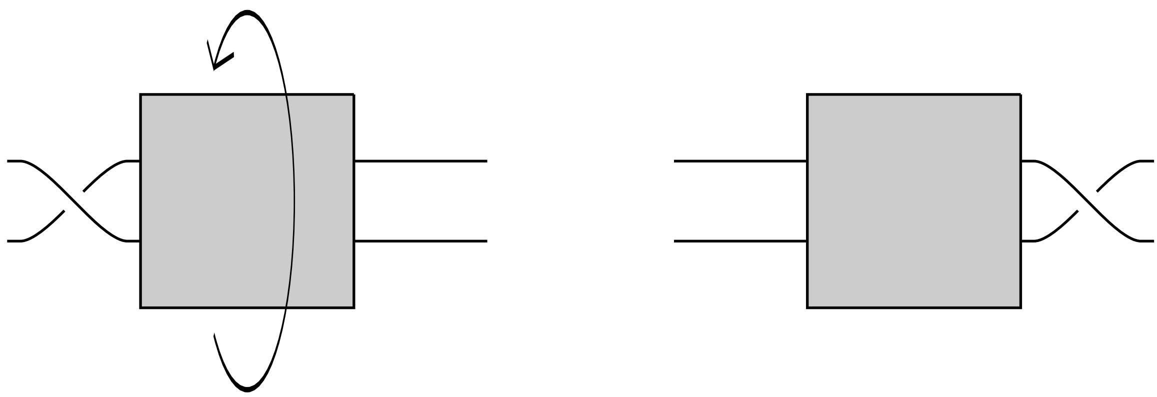
Das Alexander-Polynom bestimmt nicht das Jones-Polynom in einer Variablen und umgekehrt. So hat zum Beispiel Conways Elf-Kreuzungen-Knoten 11_{471} triviales Alexander-Polynom, aber nicht triviales Jones-Polynom in einer Variablen, und die Knoten 4_1 und 11_{388} haben dieselben Jones-Polynome in einer Variablen, aber unterschiedliche Alexander-Polynome. Darüber hinaus bestimmen das Jones-Polynom in einer Variablen und das Alexander-Polynom nicht das Jones-Polynom in zwei Variablen. So haben 11_{388} und sein Spiegelbild dasselbe Alexander- und Jones-Polynom in einer Variablen, aber das Jones-Polynom in zwei Variablen unterscheidet sie. Es gibt verschiedene Knoten, die dasselbe Jones-Polynom in zwei Variablen haben. Bis heute kennt man aber keinen Knoten, der triviales Jones-Polynom in einer Variablen hat, aber selbst nicht trivial ist.

Eine der interessanten Eigenschaften des Jones-Polynoms haben wir bereits kennengelernt, nämlich, daß es im Gegensatz zum Alexander-Polynom einen Knoten von seinem Spiegelbild unterscheiden kann. Eine weitere wichtige Anwendung sind die Beweise der Tait-Vermutungen, die wir als nächstes beschreiben. Tait wird als einer der Begründer der Knotentheorie betrachtet. Er stellte seine Vermutungen vor 100 Jahren auf [36].

Ein Knotendiagramm heißt *alternierend*, falls sich beim Durchlaufen Unterkreuzungen und Überkreuzungen abwechseln. Es heißt *reduziert*, falls es keine offensichtlich überflüssigen Kreuzungen enthält. Das sind Kreuzungen, durch die man eine geschlossene Kurve legen kann, die das Diagramm sonst nicht mehr trifft. Dann kann man einen Teil des Diagramms um 180 Grad so drehen, daß die Kreuzung verschwindet, keine weiteren Kreuzungen hinzukommen oder entfernt werden und die Äquivalenzklasse des assoziierten Knotens unverändert bleibt. Ein Knoten heißt *alternierend*, wenn es ein alternierendes Diagramm gibt, das ihn bescheibt. Man beachte, daß nicht jedes Diagramm, das einen alternierenden Knoten beschreibt, alternierend sein muß. Die erste Tait-Vermutung besagt, daß für einen alternierenden Knoten K die Anzahl der Kreuzungen in einem reduzierten alternierenden Diagramm, das K beschreibt, immer gleich ist, nämlich gleich der minimalen Anzahl von Kreuzungen von allen Knotendiagrammen, die K beschreiben. Diese Vermutung wurde von Kauffman [22] und Murasugi [32] mit Hilfe des Jones-Polynoms bewiesen. Der entscheidende Punkt ist, daß ein Viertel der Spannweite des Jones-Polynoms in einer Variablen eine untere Schranke für die minimale Anzahl von Kreuzungen eines Knotendiagramms ergibt und für alternierende reduzierte Knotendiagramme sogar gleich der Anzahl der Kreuzungen ist. Dabei ist Spannweite eines Polynoms $\sum_{n=a}^{n=b} c_n \cdot t^n$ gleich $b - a$, falls c_a und c_b von Null verschieden sind.

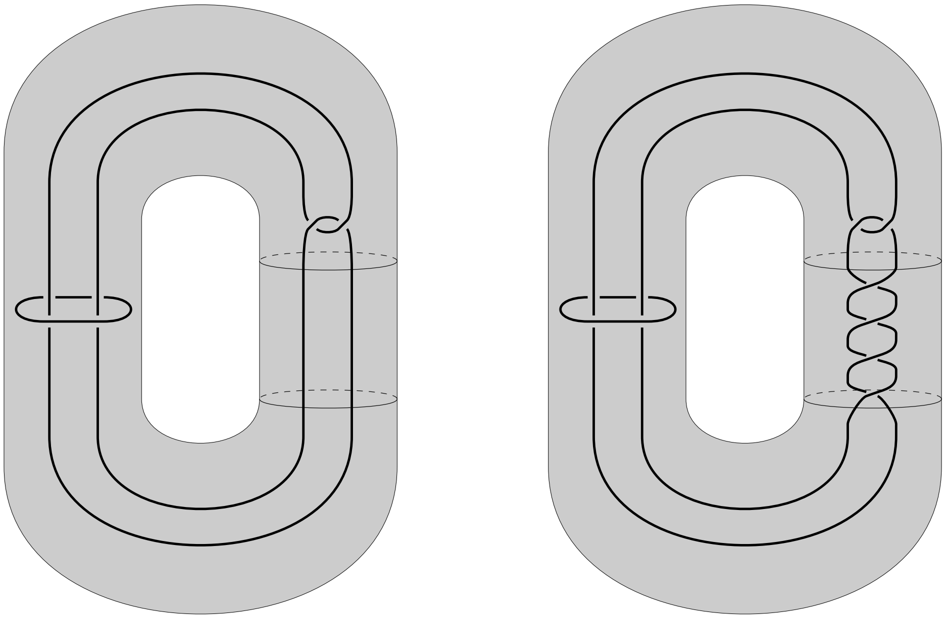
Die zweite Tait-Vermutung, die von Menasco und Thistlewaite [29] bewiesen worden ist, besagt, daß zwei alternierende reduzierte Knotendiagramme denselben Knoten genau dann darstellen, wenn sie durch flyping ineinander überführt werden können. Flyping ist eine spezielle Bewegung, die folgendermaßen aussieht:

7.1



Als nächstes erwähnen wir folgende neuere Entwicklungen in der Knotentheorie. Einen ausführlichen Überblick findet man zum Beispiel in [6].

Sei V eine orientierte Verschlingung in S^3. Sei C_V das Komplement $S^3 - V$. Für äquivalente Verschlingungen sind die Komplemente orientiert homöomorph. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht, wie folgendes Beispiel zeigt. Man beachte im folgenden: Wenn man aus der S^3 einen trivialen Knoten entfernt, erhält man bis auf orientierte Homöomorphie einen offenen Volltorus. Wenn man also in den folgenden beiden Bildern den gemeinsamen trivialen Kreis entfernt, so sieht man bis auf orientierte Homöomorphie zwei verschiedene Knoten in dem dunkel gekennzeichneten Torus. Ein Dehn-Twist in der gekennzeichneten Region des Torus liefert den gewünschten orientierungserhaltenden Homöomorphismus der Komplemente.



Gordon und Luecke [12] haben aber gezeigt, daß zwei Knoten in S^3 genau dann (ohne Berücksichtigung der Orientierung) äquivalent sind, wenn ihre Komplemente orientiert homöomorph sind. Man kann dabei nicht auf die Bedingung 'orientiert homöomorph' verzichten. Denn beispielsweise sind der Kleeblatt-Knoten und sein Spiegelbild nicht ambient isotop, aber es gibt einen orientierungsumkehrenden Homöomorphismus der Komplemente.

Ein Knoten heißt *prim*, wenn er sich nicht als die zusammenhängende Summe zweier nicht-trivialer Knoten schreiben läßt. Falls für zwei prime Knoten die Komplemente isomorphe Fundamentalgruppen haben, so sind ihre Komplemente homöomorph [39]. Insbesondere gibt es zu einer Gruppe π höchstens vier verschiedene Äquivalenzklassen von orientierten primen Knoten K, deren Komplemente π als Fundamentalgruppe haben. Ist K solch ein Knoten, so repräsentieren K^-, $K^\times$ und $(K^\times)^-$ die anderen möglichen Äquivalenzklassen.

Inzwischen gibt es weitere neue Invarianten für Verschlingungen, die sogenannten Vassiliev-Invarianten. Hier verweisen wir zum Beispiel auf den Artikel [4]. Als sehr erfolgreich für die Konstruktion von Invarianten von 3-Mannigfaltigkeiten und Verschlingungen in ihnen haben sich Quantenfeldtheorien und Quantengruppen erwiesen. Diese Entwicklung wurde von der Interpretation des Jones-Polynoms mit Hilfe von Quantenfeldtheorie von Witten [40] eingeleitet. Mehr Information dazu findet man in [38].

Zum Abschluß sei bemerkt, daß die Knotentheorie eine fundamentale Rolle in der Theorie von 3- und 4-Mannigfaltigkeiten spielt, da man 3- und 4-Mannigfaltigkeiten durch Verschlingungen beschreiben kann (siehe [25],[26]).

Literatur

[1] **Alexander, J.W.**: *"On the deformation of an n-cell"*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 9, 406-407 (1923)

[2] **Alexander, J.W.**: *"Topological invariants of knots and links"*, Trans. AMS 30, 275-306 (1928)

[3] **Artin, E.**: *" Theorie der Zöpfe"*, Hamb. Abh. 4, 47 - 72 (1925)

[4] **Bar-Natan, D.**: *"On the Vassiliev knot invariants"*, Topology 34, 423 - 472 (1995)

[5] **Birman, J.S.**: *"Braids, links and mapping class group"* Annals of Math. stud. 82, Princeton, Princeton University Press (1957)

[6] **Birman, J.S.**: *"New points of view in knot theory"*, Bulletin of the Amer. Math. Soc. 28, 253 - 287 (1993)

[7] **Burde, G. and Zieschang, H.**: *"Knots"*, de Gruyter studies in Math. 5 (1985)

[8] **Conway, J.** : *"An enumeration of knots and links and some of their related properties"* in "Computational problems in abstract algebra", Proc. Conf. Oxford 1967 (ed. J. Leech), 329-358, New York : Pergamon Press

[9] **Crowell, R. H. and Fox, R.H.**: *"Introduction to knot theory"*, Graduate Texts in Mathematics 57, Springer (1977)

[10] **Fisher, G.M.**: *"On the group of all homeomorphisms of a manifold"*, Trans. of the AMS 97, 193-212 (1960)

[11] **Freyd, P. and Yetter, D. ; Hoste, J. ; Lickorish, W.B.R. and Millet, K. ; Ocneanu, A.**: *" A new polynomial invariant for knots and links"*, Bulletin of AMS 12 (1985), 239-246 (1985)

[12] **Gordon, C. McA. and Luecke, J.**: *"Knots are determinded by their complement"*, Bull. of the AMS 20, 83 - 88 (1989)

[13] **de la Harpe, P., Kervaire, M. and Weber, C.**: *"On the Jones polynomial"*, Troisième Cycle Romand de Mathématique 1986, Swizz Seminar in Berne, Switzerland (1988)

[14] **Hempel, J.**: *"3-manifolds"*, Annals of Math. Studies 86, Princeton, Princeton University Press (1976)

[15] **Jones, V.F.R.**: *"Index for subfactors"*, Inventiones Math 72, 1- 25 (1983)

[16] **Jones, V.F.R.**: *"A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras"*, Bulletin of AMS 12, 103-111 (1985)

[17] **Jones, V.F.R.**: *"A new knot polynomial and von Neumann algebras"*, Notices AMS 33, 219-225 (1986)

[18] **Jones, V.F.R.**: *"Hecke algebra representations of a braid group and link polynomials"*, Annals of mathematics 126, 335-388 (1987)

[19] **Jones, V.F.R.**: *"Knotentheorie und statistische Mechanik"*, Spektrum der Wissenschaften 1, 66-73 (1991)

[20] **Kassel, C.**: *"Quantum groups"*, Grad. Texts in Math. 1995, Springer (1995)

[21] **Kauffman, L.H.**: *"The Conway polynomial"*, Topology 20, 101-108 (1981)

[22] **Kauffman, L.H.**: *"On knots"*, Annals of Mathematics Studies 115, Princeton (1987)

[23] **Kauffman, L.H.**: *"Knots and physics"*, World Scientific (1993)

[24] **Kervaire, M. and Weber, C.**: *"A survey on multidimensional knots"*, in "Knot theory", Proccedings of the conference in Plans-sur Bex, Switzerland 1977, editor: J.-C. Haussmann, Lecture Notes in Mathematics 685, 61 - 134 (1977)

[25] **Kirby, R.C.**: *" A calculus for framed links in S^3"*, Invent. 45, 35-56 (1978)

[26] **Kirby, R.C.** : *"The topology of* 4*-manifolds"* , Lect. Notes in Math. 1374 (1989)

[27] **Livingston, C.**: *"Knotentheorie für Einsteiger"*, Vieweg (1995)

[28] **Mandelbaum, R.**: *"Four-dimensional topology : an introduction"*, Bull of the AMS 2, 1-159 (1980)

[29] **Menasco, W. and Thistlethwaite, M.**: *"The classification of alternating links"*, Annals of Mathematics 138, 113 - 171 (1993)

[30] **Milnor, J.**: *"Infinite cyclic coverings"*, Proc. Conf on the Topology of Manifolds, 115 - 133 (1968)

[31] **Moise, E.E.**: *"Geometric topology in dimension 2 and 3"*, Graduate Texts in Mathematics 47, Springer (1977)

[32] **Murasugi, K.**: *"The Jones polynomial and classical conjectures in knot theory"*, Topology 26, 187-194 (1987)

[33] **Reidemeister, K.**: *"Knotentheorie"*, Ergebn. Math. Grenzgeb. 1, Springer (1932)

[34] **Rolfson, D.**: *"Knots and links"*, Berkeley, CA, Publish or Perish, Inc. (1976)

[35] **Rourke, C.P. and Sanderson, B.J.** : *"Introduction to piecewise-linear topology"*, Springer study edition, Springer (1982)

[36] **Tait, P.G.**: *"On knots I, II, III"*, in: *Scientific papers*, Cambridge University Press (1898)

[37] **Trotter, H.F.**: *"Non invertible knots exists"*, Topology 2, 341 - 358 (1964)

[38] **Turaev, V.G.**: *"Quantum invariants of knots and* 3*-manifolds"*, Studies in Mathematics 18, de Gruyter (1993)

[39] **Whitten, W.**: *"Knot complements and groups"*, Topology 26, 41 - 44 (1987)

[40] **Witten, E.**: *"Quantum field theory and the Jones polynomial"*, Comm. Math. Phys. 121, 351-399 (1989)

Wolfgang Lück
Fachbereich Mathematik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Einsteinstr. 62
48149 Münster
lueck@math.uni-muenster.de

Version of 4. Oktober 1996