Die Sprache, die Faszination und die Bedeutung der Mathematik

Wolfgang Lück

Bonn
Dezember 2011

Hinweis

- Dies ist keine Vorlesung.
- Dies ist ein interaktiver Vortrag.
- Mitmachen und Mitdenken erwünscht.

Sprache Mathematik

- UISTZWEIPIR
- $$U = 2\pi r$$
- $$U = 2 \cdot \pi \cdot r$$

- Die Formel besagt:
  Der Umfang eines Kreises ist proportional zu seinem Radius, wobei der Proportionalitätsfaktor das Doppelte der Zahl π ist, die ihrerseits gleich dem Flächeninhalt eines Kreises vom Radius 1 ist.

- Die Zahl π hat keine Darstellung als periodische Dezimalzahl.
- $$\pi = 3.14159265358979323846264\ldots$$

- Mathematik ist unter anderem eine extrem komplizierte und reichhaltige Sprache.
- Das macht sie einerseits schwer verständlich.
- Andererseits ist das eines ihrer Erfolgsgeheimnisse.

Sprachproblem Mathematik

Here the metric d_n^1 is a product metric of the l^1-metric on the simplicial complex $|\mathcal{U}(n)|$ scaled by the factor n and the word-metric d_G on G, i.e.,

$$d_n^1((g,x),(h,y)) = d_G(g,h) + nd^1(x,y).$$

The map $G \times \overline{X} \to G \times |\mathcal{U}(n)|$ defined by $(g,x) \mapsto (g, f^{\mathcal{U}(n)}(g,x))$ satisfies condition (3.9) and yields the functor

$$F^{\mathcal{U}(n)} \colon \mathcal{O}^G(E, G \times \overline{X}, d_{C(n)}) \to \mathcal{O}^G(E, G \times |\mathcal{U}(n)|, d_n^1).$$

We will construct the following diagram of additive categories around which the proof is organized. Here the arrows labelled inc are the obvious inclusions. The functors p_k and q_k are defined by first projecting onto the k-th factor and then applying the projection map $G \times \overline{X} \to G$ and $G \times |\mathcal{U}(k)| \to G$ respectively. Both projections clearly satisfy condition (3.9).

(4.4)

$$\begin{tikzcd}
 & \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}^G(E, G \times |\mathcal{U}(n)|, d_n^1) \arrow[d, "(3)"] \\
\mathcal{O}^G(E, (G \times \overline{X}, d_{C(n)})_{n \in \mathbb{N}}) \arrow[r, dashed, "(2)"] \arrow[d, "\mathrm{inc}"] & \mathcal{O}^G(E, (G \times |\mathcal{U}(n)|, d_n^1)_{n \in \mathbb{N}}) \arrow[d, "\mathrm{inc}"] \\
\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}^G(E, G \times \overline{X}, d_{C(n)}) \arrow[r, "\prod_{n \in \mathbb{N}} F^{\mathcal{U}(n)}"] \arrow[d, "p_k"] & \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}^G(E, G \times |\mathcal{U}(n)|, d_n^1) \arrow[d, "q_k"] \\
\mathcal{O}^G(E) \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[uu, dashed, bend left, "(1)"] & \mathcal{O}^G(E)
\end{tikzcd}$$

The lower square commutes. In the remaining sections we will establish the following facts.

(4.5) After applying $K_m(-)$ for $m \geq 1$ to the diagram the dotted arrow (1) exists

$$- \sum_i t^{-m/2+i/2}\big(\underbrace{\alpha_i[\widetilde{M}](x) - \alpha_i[\widetilde{M_R}](x)}_{=0}\big)\Big) \frac{dt}{t}\, dx;$$

$$s_2 := \int_{\mathcal{F}_{R-1}-\mathcal{F}_{R/2}} \int_0^1 \Big(\operatorname{tr} e^{-t\Delta_p^{\perp}(\widetilde{M})}(x,x) - \operatorname{tr} e^{-t\Delta_p^{\perp}[\widetilde{M_R}]}(x,x)$$

$$- \sum_i t^{-m/2+i/2}\big(\underbrace{\alpha_i[\widetilde{M}](x) - \alpha_i[\widetilde{M_R}](x)}_{=0}\big)\Big) \frac{dt}{t}\, dx;$$

$$s_3 := \int_{\mathcal{F}-\mathcal{F}_{R-1}} \int_0^1 \left(\operatorname{tr} e^{-t\Delta_p^{\perp}(\widetilde{M})}(x,x) - \sum_i t^{-m/2+i/2} \alpha_i[\widetilde{M}](x)\right) \frac{dt}{t}\, dx;$$

$$s_4 := \int_0^1 \Bigg(\int_{\mathcal{F}_R-\mathcal{F}_{R-1}} \operatorname{tr} e^{-t\Delta_p^{\perp}[\widetilde{M_R}]}(x,x)\, dx$$

$$- \sum_i t^{-m/2+i/2} \left(\int_{\mathcal{F}_R-\mathcal{F}_{R-1}} \alpha_i[\widetilde{M_R}](x)\, dx + \int_{\partial\mathcal{F}_{\mathcal{R}}} \beta_i[\widetilde{M_R}](x')\, dx'\right)\Bigg) \frac{dt}{t};$$

$$s_5 := \sum_{i=0}^m c(i,m) \int_{\mathcal{F}_R} \underbrace{\alpha_i[\widetilde{M}](x) - \alpha_i[\widetilde{M_R}](x)}_{=0}\, dx \;=\; 0;$$

$$s_6 := \sum_{i=0}^m c(i,m) \int_{\mathcal{F}-\mathcal{F}_R} \alpha_i[\widetilde{M}](x)\, dx;$$

$$s_7 := \sum_{i=0}^m c(i,m) \int_{\partial\mathcal{F}_{\mathcal{R}}} \beta_i[\widetilde{M_R}](x')\, dx'.$$

We study each of these summands individually. For s_1 and s_2 we use Theorem 2.26 applied to $N = \widetilde{M}$, $V = \widetilde{M_R}$ and $K = 1$. Note that $d(\widetilde{M_a}, \widetilde{M} - \widetilde{M_b}) = b - a$ for $b/2 \le a \le b$. This implies for appropriate constants C_1 and C_2 independent of R:

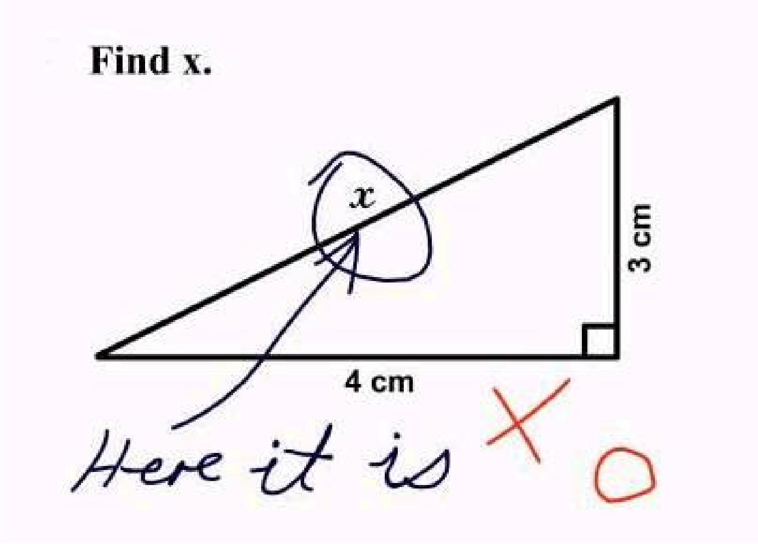
$$|s_1| \le \operatorname{vol}(M_{R/2}) \int_0^1 C_1 e^{-R^2/4C_2 t} \frac{dt}{t} \le 4 \operatorname{vol}(M) C_1 C_2 R^{-2} e^{-R^2/4C_2};$$

$$|s_2| \le \operatorname{vol}(M_{R-1} - M_{R/2}) \int_0^1 C_1 e^{-1/C_2 t} \frac{dt}{t} \le \operatorname{vol}(M - M_{R/2}) C_1 C_2 = \operatorname{vol}(E_{R/2}) C_1 C_2.$$

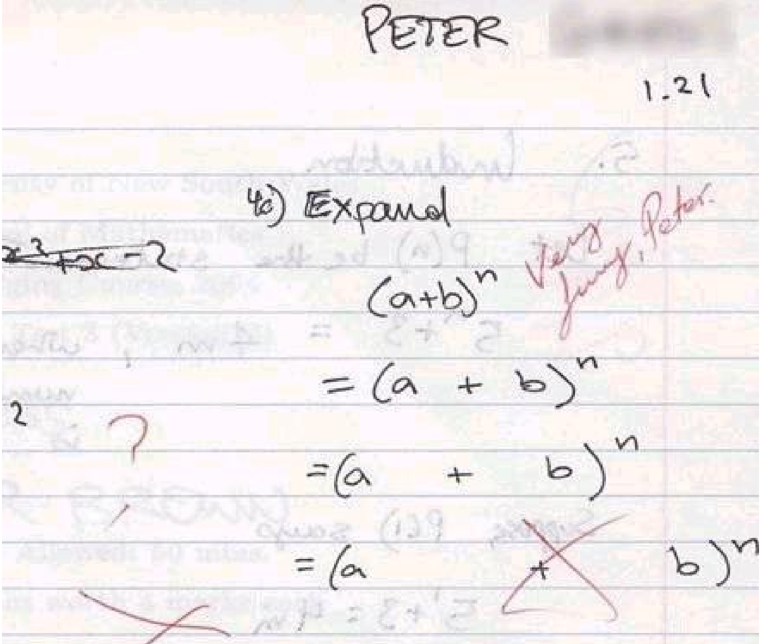
Deutsche Sprache, schwere Sprache

- Mähen Äbte Heu?
- Äbte mähen nie Heu.
- Äbte beten.

Sprachproblem Lehrer - Schüler: Find *x*



Expand $(a+b)^n$

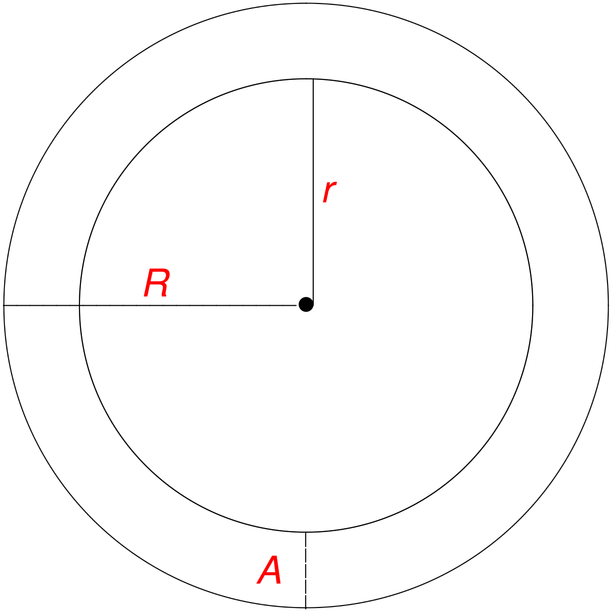


Ein Gedankenexperiment

- Stellen Sie sich die Erde als vollkommene Kugel vor.
- Um den Äquator legen wir ein Metallband.
- Die Länge ist etwa 40.000.000 m.
- Wir öffnen das Band und verlängern es um 1m auf 40.000.001 m.
- Danach lassen wir es gleichmäßig vom Äquator abstehen.

- Frage:

  Kann eine Maus unter dem Band herkriechen?


r
R
A

- Sei u bzw. U der Umfang des Bandes vor bzw. nach dem Verlängern. Es gilt

$$U - u = 1m.$$

- Sei r bzw. R der Radius des Kreises, den das Band vor bzw. nach dem Verlängern beschreibt.

- Sei A der Abstand, den das Band nach dem Verlängern von der Erdoberfläche hat. Es gilt

$$A = R - r.$$

- Es gilt

$$\begin{aligned} U &= 2 \cdot \pi \cdot R, \\ u &= 2 \cdot \pi \cdot r. \end{aligned}$$

- Subtrahiert man diese Gleichungen voneinander, erhält man

$$\begin{aligned} 1m &= U - u \\ &= 2 \cdot \pi \cdot R - 2 \cdot \pi \cdot r \\ &= 2 \cdot \pi \cdot (R - r) \\ &= 2 \cdot \pi \cdot A. \end{aligned}$$

- Dividiert man durch $2 \cdot \pi$, so erhält man
$$A = \frac{1m}{2 \cdot \pi} \geq 15cm.$$
- Der Abstand A hängt gar nicht von dem Radius der Kugel ab, mit der wir gestartet sind.
- Die Antwort auf die Frage ist also “Ja”.

Kann man Mathematik missbrauchen?

- Die Mathematik selbst ist unschuldig.
- Die Menschen, die sie entwickeln oder benutzen, aber nicht.
- Konkrete Anwendungen, Sponsoren

- Aber auch theoretische Mathematiker, die an den Grundlagen arbeiten, können sich der Verantwortung nicht entziehen.
- Das Potential von Mathematik, die zunächst als reine Grundlagenforschung ohne Anwendungsbezug entwickelt worden ist, ist nicht vorhersehbar.

Ein paar Statistiken zum Mitdenken

- Die folgenden Statistiken sind korrekt.
- Frage: Was ist Ihr spontaner Gedanke?

- Lebenspartner
- Geschiedene Leute haben eine höhere Lebenserwartung.

- Karriere
- Leute in Führungspositionen haben größere Füße.

- Religion
- Mehr als siebzig Prozent aller Verbrecher in Bayern sind katholisch.

Topologen, Donuts und Kaffeetassen

- Häufig zitierte Phrase:
- Ein Topologe ist jemand, der einen Donut nicht von einer Kaffeetasse unterscheiden kann.

- Schon besser:

- Ein Topologe ist jemand, der einen Donut von einer Kaffeetasse unterscheiden kann,
  aber nicht unbedingt will.

- Noch besser:
- Topologen hatten die geniale Einsicht, dass in einem gewissen Sinn das geometrische Gebilde, das ein Donut beschreibt, dasselbe ist wie das geometrische Gebilde, das eine Kaffeetasse beschreibt.

Homöomorphie

- Seien M und N zwei geometrische Gebilde.
- Sie heißen homöomorph, wenn es stetige Abbildungen $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ gibt derart, dass $g \circ f = \mathrm{id}_M$ und $f \circ g = \mathrm{id}_N$ gelten.

- Anschaulich bedeutet dies, dass man durch Ziehen und Zerren ein Gebilde in das andere überführen kann, ohne dass man zwischenzeitlich etwas aufschneidet oder zerreißt und wieder zusammenfügt.

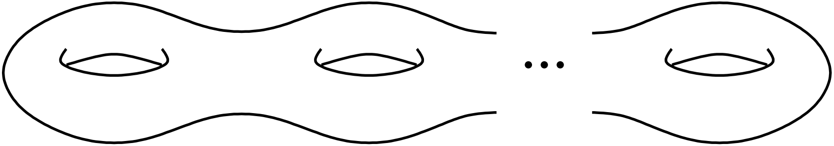
- Eine Kugel vom Radius 1m und eine Kugel vom Radius 1 km sind homöomorph;
- Eine Kugel und ein Würfel sind homöomorph;
- Eine Kaffeetasse und ein Donut sind homöomorph.
- Eine Kugel und ein Donut sind nicht homöomorph.

Flächen

- Eine Fläche ist ein geometrisches geschlossenesTeilgebilde im drei-dimensionalen Raum, das lokal homöomorph zum zwei-dimensionalen Raum ist.
- Jede Fläche ist zu genau einer Standardfläche vom Geschlecht g homöomorph.

- Fläche vom Geschlecht g.

  (Das Geschlecht ist die Anzahl der Löcher).



- Die folgenden Bilder zeigen Objekte, deren Oberfläche eine Fläche beschreibt.
- Frage: Was ist ihr Geschlecht?

Euler-Charakteristik

- Man kann jede Fläche mit Vielecken so überdecken, dass zwei Vielecke sich gar nicht berühren oder ihr Durchschnitt genau aus einer Kante besteht.


© 2001 Winston Mitchell

- Die Euler-Charakteristik χ so einer Überdeckung ist definiert als

$$\chi = E - K + F.$$

- Dabei sind E, K und F die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen.

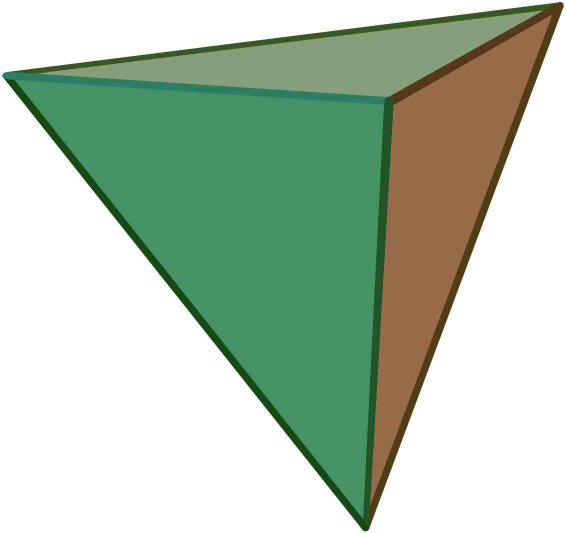
- Die Euler-Charakteristik hängt nicht von der Wahl der Überdeckung ab.
- Zwei Flächen sind genau dann homöomorph, wenn sie dieselbe Euler-Charakteristik haben.
- $$\chi(F_g) = 2 - 2g$$

- Die Euler-Charakteristik der Kugeloberfläche F_0 ist 2.
- Die Euler-Charakteristik der Oberfläche eines Donuts F_1 ist 0.
- Die Euler-Charakteristik der Oberfläche einer Kaffeetasse ist auch 0.

Platonische Körper

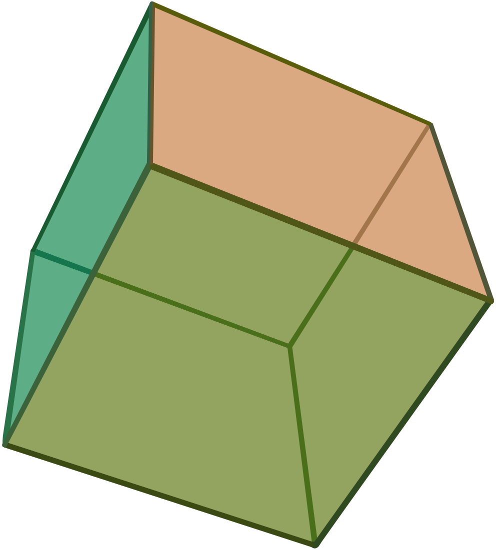
- Ein Platonischer Körper ist ein konvexer Körper im Raum, der durch reguläre n-Ecke derart begrenzt wird, dass der Durchschnitt zweier regulärer n-Ecke leer ist oder aus genau einer gemeinsamen Kante besteht und an jeder Ecke genau m Kanten zusammenstoßen.

Tetraeder



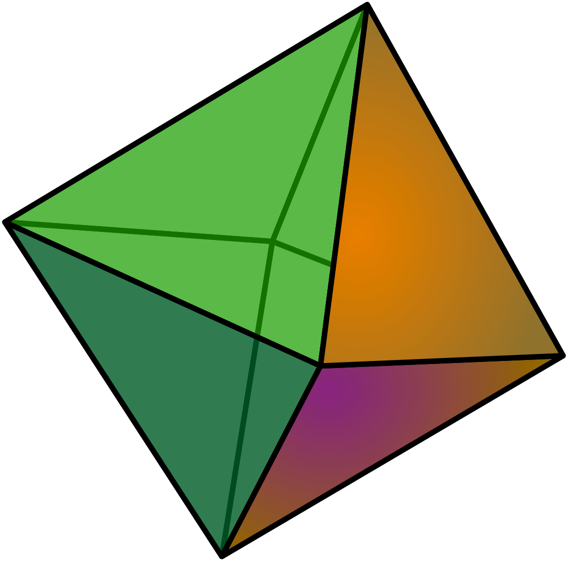
Hexaeder

Hexahedron.svg 11.06.08 23:58



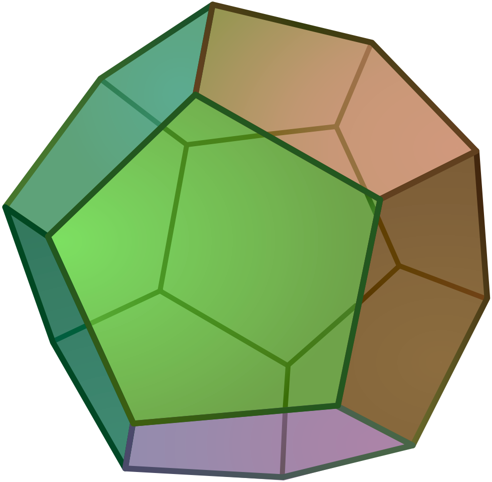
Oktaeder

Octahedron.svg 12.06.08 00:00



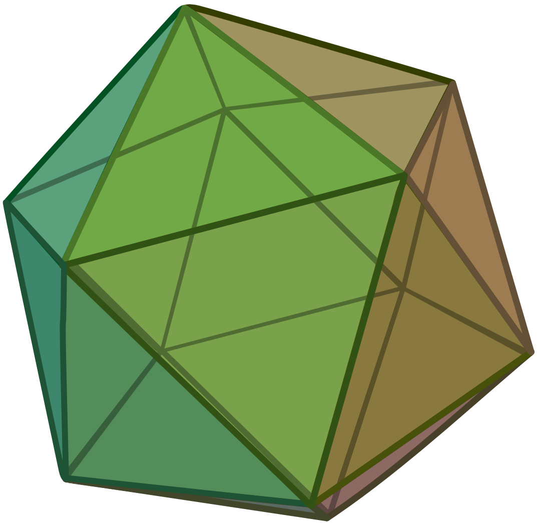
Dodekaeder

POV-Ray-Dodecahedron.svg



Ikosaeder

Icosahedron.svg



- Obwohl es beliebig viele regelmäßige Vielecke gibt, existieren nur fünf regelmäßige Körper:

  Tetraeder,

  Hexaeder (oder Würfel),

  Oktaeder,

  Dodekaeder,

  Ikosaeder.

- Das wollen wir mit Hilfe der Euler-Charakteristik beweisen.
- Die Oberfläche eines Platonischen Körpers ist zu der Kugeloberfläche homöomorph.
- Also gilt

$$E - K + F = 2.$$

- Offensichtlich gilt auch
$$mE = 2K$$
und
$$nF = 2K$$

- Daraus folgt die Gleichung
$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{K} + \frac{1}{2}.$$

- Offensichtlich muss $m, n \geq 3$ gelten.

- Aus der letzten Gleichung folgt

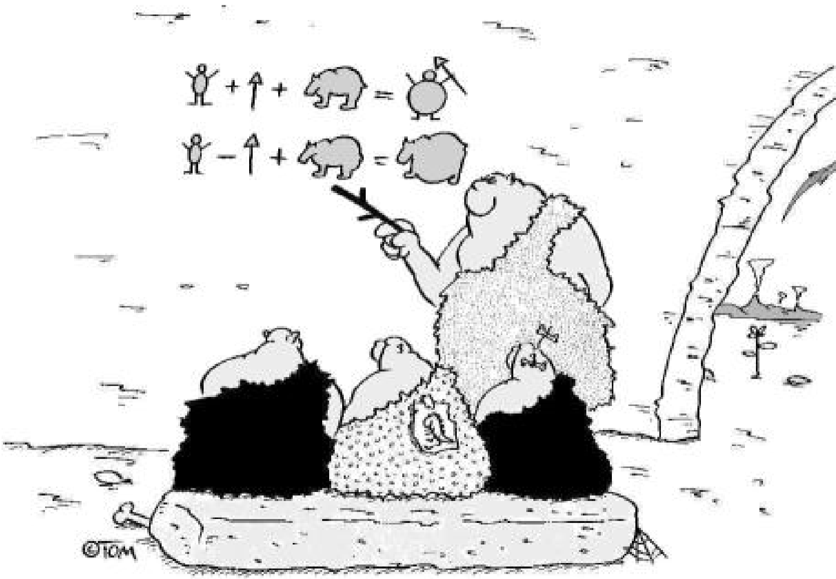
$$\frac{1}{2} < \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

- Also ist nur möglich

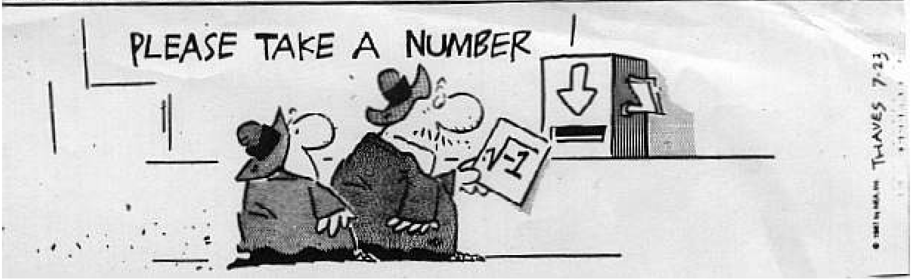
$$\begin{aligned} m = 3 \quad n = 3; \\ m = 4 \quad n = 3; \\ m = 3 \quad n = 4; \\ m = 3 \quad n = 5; \\ m = 5 \quad n = 3; \end{aligned}$$

m	n	E	K	F	Körper
3	3	6	4	4	Tetraeder
3	4	12	8	6	Hexaeder
4	3	12	6	8	Oktaeder
3	5	30	20	12	Dodekaeder
5	3	30	12	20	Ikosaeder

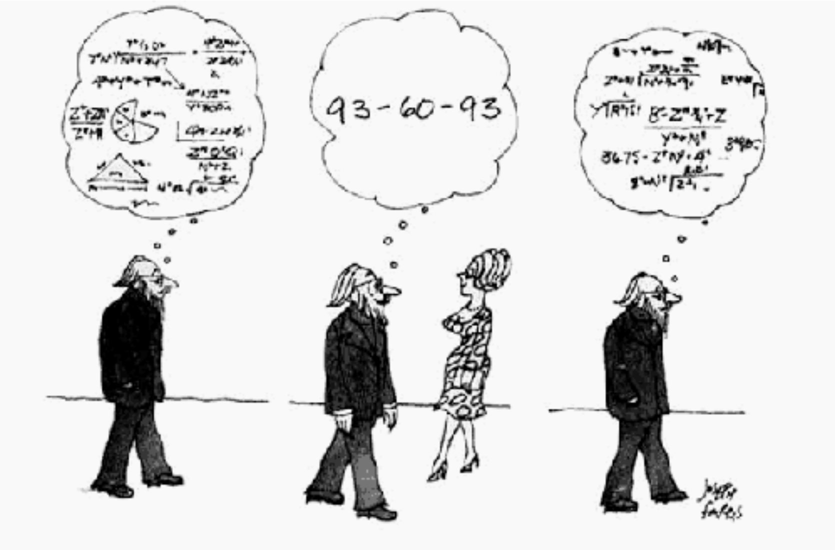
Ein paar Cartoons

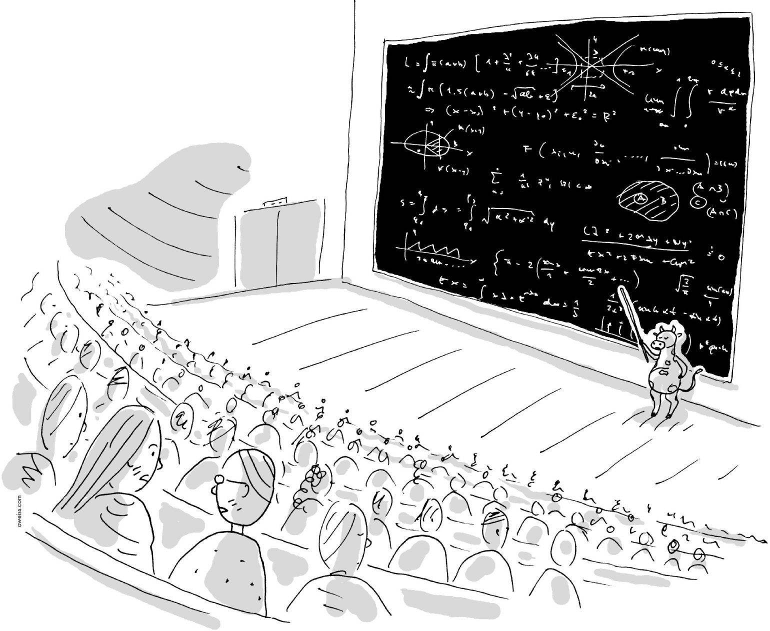

©TOM

NK & ERNEST BOB THAVES




... und was kostet eine Kurvendiskussion?
KITTIHAWK


93-60-93



– *„Ja wie, also, findest du das nicht auch irgendwie eigenartig, Anatol?"*
– *„Aber sicher! Im zweiten Integral von oben muss es natürlich* ε_0 *statt* ε *heißen."*