



WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

General Introduction and Central Tasks

Projekt Z · SFB 878 · Groups, Geometry & Actions

W. Lück



Ziel des SFB-s.

- ▶ Das zentrale Anliegen des geplanten Sonderforschungsbereichs ist das Zusammenspiel von **Gruppen**, **Geometrie** und **Aktionen**.
- ▶ Es sollen Probleme aus verschiedenen Bereichen wie dem der **Algebra**, der **Differentialgeometrie**, der **Mathematischen Logik**, der **mathematischen Physik**, der **Topologie** und der **Wahrscheinlichkeitstheorie** bearbeitet werden.
- ▶ Der **wissenschaftliche Mehrwert** besteht im **systematischen Transfer** von Ideen, Lösungsstrategien und Techniken zwischen diesen Bereichen, der zu neuen Einsichten und Resultaten führen und neue Entwicklungen initiieren wird.
- ▶ **Alleinstellungsmerkmal**: Auswahl und Kombination der Gebiete.

Ziel des SFB-s.

- ▶ Das zentrale Anliegen des geplanten Sonderforschungsbereichs ist das Zusammenspiel von **Gruppen**, **Geometrie** und **Aktionen**.
- ▶ Es sollen Probleme aus verschiedenen Bereichen wie dem der **Algebra**, der **Differentialgeometrie**, der **Mathematischen Logik**, der **mathematischen Physik**, der **Topologie** und der **Wahrscheinlichkeitstheorie** bearbeitet werden.
- ▶ Der **wissenschaftliche Mehrwert** besteht im **systematischen Transfer** von Ideen, Lösungsstrategien und Techniken zwischen diesen Bereichen, der zu neuen Einsichten und Resultaten führen und neue Entwicklungen initiieren wird.
- ▶ **Alleinstellungsmerkmal**: Auswahl und Kombination der Gebiete.

Ziel des SFB-s.

- ▶ Das zentrale Anliegen des geplanten Sonderforschungsbereichs ist das Zusammenspiel von **Gruppen**, **Geometrie** und **Aktionen**.
- ▶ Es sollen Probleme aus verschiedenen Bereichen wie dem der **Algebra**, der **Differentialgeometrie**, der **Mathematischen Logik**, der **mathematischen Physik**, der **Topologie** und der **Wahrscheinlichkeitstheorie** bearbeitet werden.
- ▶ Der **wissenschaftliche Mehrwert** besteht im **systematischen Transfer** von Ideen, Lösungsstrategien und Techniken zwischen diesen Bereichen, der zu neuen Einsichten und Resultaten führen und neue Entwicklungen initiieren wird.
- ▶ **Alleinstellungsmerkmal**: Auswahl und Kombination der Gebiete.

Ziel des SFB-s.

- ▶ Das zentrale Anliegen des geplanten Sonderforschungsbereichs ist das Zusammenspiel von **Gruppen**, **Geometrie** und **Aktionen**.
- ▶ Es sollen Probleme aus verschiedenen Bereichen wie dem der **Algebra**, der **Differentialgeometrie**, der **Mathematischen Logik**, der **mathematischen Physik**, der **Topologie** und der **Wahrscheinlichkeitstheorie** bearbeitet werden.
- ▶ Der **wissenschaftliche Mehrwert** besteht im **systematischen Transfer** von Ideen, Lösungsstrategien und Techniken zwischen diesen Bereichen, der zu neuen Einsichten und Resultaten führen und neue Entwicklungen initiieren wird.
- ▶ **Alleinstellungsmerkmal**: Auswahl und Kombination der Gebiete.

Ziel des SFB-s.

- ▶ Das zentrale Anliegen des geplanten Sonderforschungsbereichs ist das Zusammenspiel von **Gruppen**, **Geometrie** und **Aktionen**.
- ▶ Es sollen Probleme aus verschiedenen Bereichen wie dem der **Algebra**, der **Differentialgeometrie**, der **Mathematischen Logik**, der **mathematischen Physik**, der **Topologie** und der **Wahrscheinlichkeitstheorie** bearbeitet werden.
- ▶ Der **wissenschaftliche Mehrwert** besteht im **systematischen Transfer** von Ideen, Lösungsstrategien und Techniken zwischen diesen Bereichen, der zu neuen Einsichten und Resultaten führen und neue Entwicklungen initiieren wird.
- ▶ **Alleinstellungsmerkmal**: Auswahl und Kombination der Gebiete.

Am SFB-Konzept beteiligte Gruppen.

- ▶ Algebra und Zahlentheorie (Deninger, Hartl, Schneider).
- ▶ Nicht-kommutative Geometrie (Cuntz, Echterhoff, Wulkenhaar).
- ▶ Topologie (Bartels, Lück).
- ▶ Differentialgeometrie (Böhm, Kramer, Lohkamp, Wilking).
- ▶ Mathematische Logik (Schindler, Tent).
- ▶ Stochastik (Alsmeyer, Gantert, Löwe).
- ▶ Ausstehende Berufungen für 2010.
 - ▶ Zwei W2-Stellen in Reiner Mathematik (unbefristet).
 - ▶ Zwei W2-Stellen in Reiner Mathematik (befristet).
 - ▶ Eine W2-Stelle in der Mathematischen Logik (unbefristet).
 - ▶ Eine W1-Stelle in der Mathematischen Logik (befristet).

Am SFB-Konzept beteiligte Gruppen.

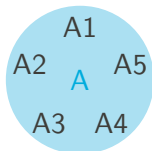
- ▶ Algebra und Zahlentheorie (Deninger, Hartl, Schneider).
- ▶ Nicht-kommutative Geometrie (Cuntz, Echterhoff, Wulkenhaar).
- ▶ Topologie (Bartels, Lück).
- ▶ Differentialgeometrie (Böhm, Kramer, Lohkamp, Wilking).
- ▶ Mathematische Logik (Schindler, Tent).
- ▶ Stochastik (Alsmeyer, Gantert, Löwe).
- ▶ Ausstehende Berufungen für 2010.
 - ▶ Zwei W2-Stellen in Reiner Mathematik (unbefristet).
 - ▶ Zwei W2-Stellen in Reiner Mathematik (befristet).
 - ▶ Eine W2-Stelle in der Mathematischen Logik (unbefristet).
 - ▶ Eine W1-Stelle in der Mathematischen Logik (befristet).

Am SFB-Konzept beteiligte Gruppen.

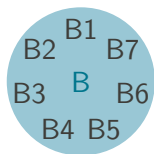
- ▶ Algebra und Zahlentheorie (Deninger, Hartl, Schneider).
- ▶ Nicht-kommutative Geometrie (Cuntz, Echterhoff, Wulkenhaar).
- ▶ Topologie (Bartels, Lück).
- ▶ Differentialgeometrie (Böhm, Kramer, Lohkamp, Wilking).
- ▶ Mathematische Logik (Schindler, Tent).
- ▶ Stochastik (Alsmeyer, Gantert, Löwe).
- ▶ Ausstehende Berufungen für 2010.
 - ▶ Zwei W2-Stellen in Reiner Mathematik (unbefristet).
 - ▶ Zwei W2-Stellen in Reiner Mathematik (befristet).
 - ▶ Eine W2-Stelle in der Mathematischen Logik (unbefristet).
 - ▶ Eine W1-Stelle in der Mathematischen Logik (befristet).

Vernetzung

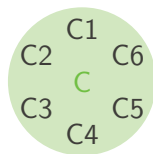
Algebra &
mathematische Logik



Geometrie &
Topologie

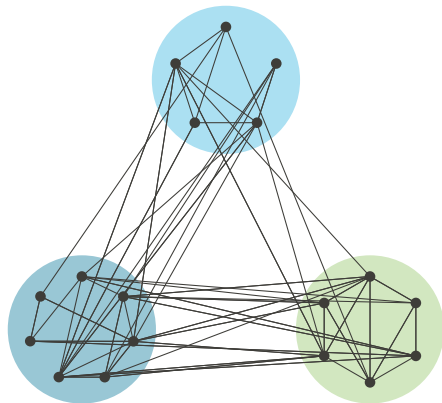


Nichtkommu-
tative Geometrie &
Stochastik



Vernetzung

Algebra &
mathematische Logik



Geometrie &
Topologie

Nichtkommu-
tative Geometrie &
Stochastik

Exzellenz der Antragsteller.

▶ Hohe fachliche Qualifikation.

- ▶ 5 Leibniz-Preisträger, davon 2 aktuell.
- ▶ 2 Max-Planck-Forschungspreisträger.
- ▶ 6 Vorträge auf International Congresses of Mathematicians.
- ▶ Starke internationale Vernetzung.

▶ Große Erfahrung im Betrieb von Drittmittelinrichtungen.

- ▶ SFB *Geometrische Strukturen in der Mathematik* (1997-2009).
- ▶ Graduiertenkolleg *Algebraische Geometrie und Zahlentheorie* (1991-2000).
- ▶ Graduiertenkolleg *Analytische Topologie und Metageometrie* (2000-2009).
- ▶ Schwerpunktprogramm *Globale Differentialgeometrie* (2003-2009).

Exzellenz der Antragsteller.

▶ Hohe fachliche Qualifikation.

- ▶ 5 Leibniz-Preisträger, davon 2 aktuell.
- ▶ 2 Max-Planck-Forschungspreisträger.
- ▶ 6 Vorträge auf International Congresses of Mathematicians.
- ▶ Starke internationale Vernetzung.

▶ Große Erfahrung im Betrieb von Drittmittelinrichtungen.

- ▶ SFB *Geometrische Strukturen in der Mathematik* (1997-2009).
- ▶ Graduiertenkolleg *Algebraische Geometrie und Zahlentheorie* (1991-2000).
- ▶ Graduiertenkolleg *Analytische Topologie und Metageometrie* (2000-2009).
- ▶ Schwerpunktprogramm *Globale Differentialgeometrie* (2003-2009).

Exzellenz der Antragsteller.

▶ Hohe fachliche Qualifikation.

- ▶ 5 Leibniz-Preisträger, davon 2 aktuell.
- ▶ 2 Max-Planck-Forschungspreisträger.
- ▶ 6 Vorträge auf International Congresses of Mathematicians.
- ▶ Starke internationale Vernetzung.

▶ Große Erfahrung im Betrieb von Drittmittelinrichtungen.

- ▶ SFB *Geometrische Strukturen in der Mathematik* (1997-2009).
- ▶ Graduiertenkolleg *Algebraische Geometrie und Zahlentheorie* (1991-2000).
- ▶ Graduiertenkolleg *Analytische Topologie und Metageometrie* (2000-2009).
- ▶ Schwerpunktprogramm *Globale Differentialgeometrie* (2003-2009).

Exzellenz der Antragsteller.

▶ Hohe fachliche Qualifikation.

- ▶ 5 Leibniz-Preisträger, davon 2 aktuell.
- ▶ 2 Max-Planck-Forschungspreisträger.
- ▶ 6 Vorträge auf International Congresses of Mathematicians.
- ▶ Starke internationale Vernetzung.

▶ Große Erfahrung im Betrieb von Drittmittelinrichtungen.

- ▶ SFB *Geometrische Strukturen in der Mathematik* (1997-2009).
- ▶ Graduiertenkolleg *Algebraische Geometrie und Zahlentheorie* (1991-2000).
- ▶ Graduiertenkolleg *Analytische Topologie und Metageometrie* (2000-2009).
- ▶ Schwerpunktprogramm *Globale Differentialgeometrie* (2003-2009).

Exzellenz der Antragsteller.

▶ Hohe fachliche Qualifikation.

- ▶ 5 Leibniz-Preisträger, davon 2 aktuell.
- ▶ 2 Max-Planck-Forschungspreisträger.
- ▶ 6 Vorträge auf International Congresses of Mathematicians.
- ▶ Starke internationale Vernetzung.

▶ Große Erfahrung im Betrieb von Drittmittelinrichtungen.

- ▶ SFB *Geometrische Strukturen in der Mathematik* (1997-2009).
- ▶ Graduiertenkolleg *Algebraische Geometrie und Zahlentheorie* (1991-2000).
- ▶ Graduiertenkolleg *Analytische Topologie und Metageometrie* (2000-2009).
- ▶ Schwerpunktprogramm *Globale Differentialgeometrie* (2003-2009).

Exzellente Infrastruktur.

- ▶ Ein neuer **Anbau** an das Gebäude des Fachbereichs wurde letztes Jahr fertig gestellt.
- ▶ Damit ist der Raumbedarf des geplanten Sonderforschungsbereich gesichert.

Exzellente Infrastruktur.

- ▶ Ein neuer **Anbau** an das Gebäude des Fachbereichs wurde letztes Jahr fertig gestellt.
- ▶ Damit ist der Raumbedarf des geplanten Sonderforschungsbereich gesichert.





- ▶ **Exzellentes Verhältnis zu und volle Unterstützung der Leitung der Universität.**
- ▶ **Gezielte Berufungspolitik** seit circa 5 Jahren in Hinblick auf diesen Neuantrag.

- ▶ **Exzellentes Verhältnis** zu und **volle Unterstützung** der **Leitung der Universität**.
- ▶ **Gezielte Berufungspolitik** seit circa 5 Jahren in Hinblick auf diesen Neuantrag.

Statistik.

- ▶ Beantragte Stellen: 41
- ▶ 1-Jahres-Stipendien: 10
- ▶ Anzahl der Projekte: 18 + 2
- ▶ Anzahl der Projektleiter: 21
- ▶ Anzahl der beteiligten Wissenschaftler: 36
- ▶ Finanzbedarf

2010: 1.069.100 EURO

2011: 2.204.000 EURO

2012: 2.335.200 EURO

2013: 2.339.500 EURO

2014: 1.133.200 EURO



WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

Integriertes Graduiertenkolleg

Projekt G · SFB 878 · Groups, Geometry & Actions

Katrin Tent



wissen.leben
WWU Münster

Fachbereich 10
Mathematik und Informatik

Integriertes Graduiertenkolleg

▶ Rahmenbedingungen

- ▶ Hohe fachliche Qualifikation.
- ▶ Gebietsübergreifende Arbeitsgruppen.
- ▶ Große Erfahrung in der Nachwuchsförderung.

▶ Abschlüsse im Zeitraum 2003–2009:

abgeschlossene Diplome:	201
abgeschlossene Promotionen:	63
abgeschlossene Habilitationen:	11
Wegberufungen aus qualifizierenden Stellen:	14

Integriertes Graduiertenkolleg

▶ Rahmenbedingungen

- ▶ Hohe fachliche Qualifikation.
- ▶ Gebietsübergreifende Arbeitsgruppen.
- ▶ Große Erfahrung in der Nachwuchsförderung.

▶ Abschlüsse im Zeitraum 2003–2009:

abgeschlossene Diplome:	201
abgeschlossene Promotionen:	63
abgeschlossene Habilitationen:	11
Wegberufungen aus qualifizierenden Stellen:	14

- ▶ **Exzellente Bedingung zur Anwerbung von Doktoranden, Postdoktoranden.**
 - ▶ Hohe Anfängerzahlen.
 - ▶ Viele Anfragen nach Promotions- und Postdoktorandenstellen, sowohl aus Deutschland als auch aus dem Ausland.
 - ▶ Stellen im vorigen Graduiertenkolleg und Sonderforschungsbereich konnten sehr gut besetzt werden.
- ▶ **Ziel**
 - ▶ Ausbildung von internationalen Top-Studenten mit breitem Fachwissen und der Fähigkeit, gebietsübergreifend zu arbeiten.
 - ▶ Dafür brauchen wir einen Rahmen mit größtmöglicher Flexibilität.

- ▶ **Exzellente Bedingung zur Anwerbung von Doktoranden, Postdoktoranden.**
 - ▶ Hohe Anfängerzahlen.
 - ▶ Viele Anfragen nach Promotions- und Postdoktorandenstellen, sowohl aus Deutschland als auch aus dem Ausland.
 - ▶ Stellen im vorigen Graduiertenkolleg und Sonderforschungsbereich konnten sehr gut besetzt werden.
- ▶ **Ziel**
 - ▶ Ausbildung von internationalen Top-Studenten mit breitem Fachwissen und der Fähigkeit, gebietsübergreifend zu arbeiten.
 - ▶ Dafür brauchen wir einen Rahmen mit größtmöglicher Flexibilität.

- ▶ **Exzellente Bedingung zur Anwerbung von Doktoranden, Postdoktoranden.**
 - ▶ Hohe Anfängerzahlen.
 - ▶ Viele Anfragen nach Promotions- und Postdoktorandenstellen, sowohl aus Deutschland als auch aus dem Ausland.
 - ▶ Stellen im vorigen Graduiertenkolleg und Sonderforschungsbereich konnten sehr gut besetzt werden.
- ▶ **Ziel**
 - ▶ Ausbildung von internationalen Top-Studenten mit breitem Fachwissen und der Fähigkeit, gebietsübergreifend zu arbeiten.
 - ▶ Dafür brauchen wir einen Rahmen mit größtmöglicher Flexibilität.

Qualifizierungskonzept

- ▶ **Spezialvorlesungen:** Mindestens 5 Vorlesungen in den ersten beiden Jahren;
- ▶ **Gastvorlesungen:** Ergänzung des Vorlesungsangebotes durch Gastprofessoren;
- ▶ **Sommerschulen und spezielle Semester:** Spezialprogramme zu aktuellen Themen;
- ▶ **Kolloquium:** Regelmäßige Teilnahme, vorbereitende Seminare der Sprecher;
- ▶ **Wissenschaftliches Arbeiten:** Doktoranden sollen in Vorträgen über ihre Fortschritte berichten;
- ▶ **Kurzzeitstipendien:** Teilnahme an speziellen Programmen.

Qualifizierungskonzept

- ▶ **Spezialvorlesungen:** Mindestens 5 Vorlesungen in den ersten beiden Jahren;
- ▶ **Gastvorlesungen:** Ergänzung des Vorlesungsangebotes durch Gastprofessoren;
- ▶ **Sommerschulen und spezielle Semester:** Spezialprogramme zu aktuellen Themen;
- ▶ **Kolloquium:** Regelmäßige Teilnahme, vorbereitende Seminare der Sprecher;
- ▶ **Wissenschaftliches Arbeiten:** Doktoranden sollen in Vorträgen über ihre Fortschritte berichten;
- ▶ **Kurzzeitstipendien:** Teilnahme an speziellen Programmen.

Qualifizierungskonzept

- ▶ **Spezialvorlesungen:** Mindestens 5 Vorlesungen in den ersten beiden Jahren;
- ▶ **Gastvorlesungen:** Ergänzung des Vorlesungsangebotes durch Gastprofessoren;
- ▶ **Sommerschulen und spezielle Semester:** Spezialprogramme zu aktuellen Themen;
- ▶ **Kolloquium:** Regelmäßige Teilnahme, vorbereitende Seminare der Sprecher;
- ▶ **Wissenschaftliches Arbeiten:** Doktoranden sollen in Vorträgen über ihre Fortschritte berichten;
- ▶ **Kurzzeitstipendien:** Teilnahme an speziellen Programmen.

Qualifizierungskonzept

- ▶ **Spezialvorlesungen:** Mindestens 5 Vorlesungen in den ersten beiden Jahren;
- ▶ **Gastvorlesungen:** Ergänzung des Vorlesungsangebotes durch Gastprofessoren;
- ▶ **Sommerschulen und spezielle Semester:** Spezialprogramme zu aktuellen Themen;
- ▶ **Kolloquium:** Regelmäßige Teilnahme, vorbereitende Seminare der Sprecher;
- ▶ **Wissenschaftliches Arbeiten:** Doktoranden sollen in Vorträgen über ihre Fortschritte berichten;
- ▶ **Kurzzeitstipendien:** Teilnahme an speziellen Programmen.

Qualifizierungskonzept

- ▶ **Spezialvorlesungen:** Mindestens 5 Vorlesungen in den ersten beiden Jahren;
- ▶ **Gastvorlesungen:** Ergänzung des Vorlesungsangebotes durch Gastprofessoren;
- ▶ **Sommerschulen und spezielle Semester:** Spezialprogramme zu aktuellen Themen;
- ▶ **Kolloquium:** Regelmäßige Teilnahme, vorbereitende Seminare der Sprecher;
- ▶ **Wissenschaftliches Arbeiten:** Doktoranden sollen in Vorträgen über ihre Fortschritte berichten;
- ▶ **Kurzzeitstipendien:** Teilnahme an speziellen Programmen.

Qualifizierungskonzept

- ▶ **Spezialvorlesungen:** Mindestens 5 Vorlesungen in den ersten beiden Jahren;
- ▶ **Gastvorlesungen:** Ergänzung des Vorlesungsangebotes durch Gastprofessoren;
- ▶ **Sommerschulen und spezielle Semester:** Spezialprogramme zu aktuellen Themen;
- ▶ **Kolloquium:** Regelmäßige Teilnahme, vorbereitende Seminare der Sprecher;
- ▶ **Wissenschaftliches Arbeiten:** Doktoranden sollen in Vorträgen über ihre Fortschritte berichten;
- ▶ **Kurzzeitstipendien:** Teilnahme an speziellen Programmen.

Organisations- und Betreuungskonzept

- ▶ **Anwerbung:** Nach internationaler Ausschreibung.
- ▶ **Auswahl:** Durch Vortrag und persönliches Gespräch, wann immer möglich. Evaluation nach dem ersten Jahr.
- ▶ **Tandem-Betreuung:** Gebietsübergreifende Themen sollen von zwei Professoren betreut werden.
- ▶ **Mentoren:** Mindestens ein Mentoren-Studenten-Treffen pro Semester, Studenten sind vorschlagsberechtigt.

Organisations- und Betreuungskonzept

- ▶ **Anwerbung:** Nach internationaler Ausschreibung.
- ▶ **Auswahl:** Durch Vortrag und persönliches Gespräch, wann immer möglich. Evaluation nach dem ersten Jahr.
- ▶ **Tandem-Betreuung:** Gebietsübergreifende Themen sollen von zwei Professoren betreut werden.
- ▶ **Mentoren:** Mindestens ein Mentoren-Studenten-Treffen pro Semester, Studenten sind vorschlagsberechtigt.

Organisations- und Betreuungskonzept

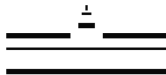
- ▶ **Anwerbung:** Nach internationaler Ausschreibung.
- ▶ **Auswahl:** Durch Vortrag und persönliches Gespräch, wann immer möglich. Evaluation nach dem ersten Jahr.
- ▶ **Tandem-Betreuung:** Gebietsübergreifende Themen sollen von zwei Professoren betreut werden.
- ▶ **Mentoren:** Mindestens ein Mentoren-Studenten-Treffen pro Semester, Studenten sind vorschlagsberechtigt.

Organisations- und Betreuungskonzept

- ▶ **Anwerbung:** Nach internationaler Ausschreibung.
- ▶ **Auswahl:** Durch Vortrag und persönliches Gespräch, wann immer möglich. Evaluation nach dem ersten Jahr.
- ▶ **Tandem-Betreuung:** Gebietsübergreifende Themen sollen von zwei Professoren betreut werden.
- ▶ **Mentoren:** Mindestens ein Mentoren-Studenten-Treffen pro Semester, Studenten sind vorschlagsberechtigt.

Frauenförderung und Familienfreundlichkeit

- ▶ **Mentoren:** Frauen können (nach Wunsch) durch weibliche Mentoren betreut werden.
- ▶ **Stellenzahl:** Aktive Anwerbung von Frauen mit dem Ziel, mindestens 1/3 der Stellen mit Frauen zu besetzen.
- ▶ **Frauenspezifische Programme:** Regelmäßige Frauensprechstunden. Bei Bedarf können auch Frauenseminare (z.B. in Rothenberge) angeboten werden.
- ▶ **Kinderbetreuung:** Die Universität bietet ein großes Spektrum an Maßnahmen an, die durch weitere Mittel im SFB ergänzt werden sollen.



WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

Algebraische Vektorbündel

Projekt A1 · SFB 878 · Groups, Geometry & Actions

C. Deninger



Algebraische Vektorbündel

- ▶ p -adische Narasimhan–Seshadri Theorie
- ▶ Dualität von Néron Modellen

Algebraische Vektorbündel

- ▶ p -adische Narasimhan–Seshadri Theorie
- ▶ Dualität von Néron Modellen

p -adische Narasimhan–Seshadri Theorie

Klassisch: Korrespondenz zwischen stabilen Vektorbündeln vom Grad Null auf einer kompakten Riemannschen Fläche und irreduziblen unitären Darstellungen der Fundamentalgruppe (1964)

Geometrie \longleftrightarrow Gruppentheorie

p -adische Analogien (2005) durch Deninger–Werner und unabhängig Faltings

$X/\overline{\mathbb{Q}}_p$ glatte projektive Kurve. Volltreuer Funktor:

$$\rho : \left\{ \begin{array}{l} \text{pss-Vektorbündel } E \text{ auf } X \otimes \mathbb{C}_p \\ \text{vom Grad Null} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Stetige Darstellungen} \\ \text{von } \pi_1(X, x) \text{ auf} \\ \mathbb{C}_p\text{-Vektorräumen} \end{array} \right\}$$

pss = potentiell stark semistabile Reduktion

p -adische Narasimhan–Seshadri Theorie

Klassisch: Korrespondenz zwischen stabilen Vektorbündeln vom Grad Null auf einer kompakten Riemannschen Fläche und irreduziblen unitären Darstellungen der Fundamentalgruppe (1964)

Geometrie \longleftrightarrow Gruppentheorie

p -adische Analogien (2005) durch Deninger–Werner und unabhängig Faltings

$X/\overline{\mathbb{Q}}_p$ glatte projektive Kurve. Volltreuer Funktor:

$$\rho : \left\{ \begin{array}{l} \text{pss-Vektorbündel } E \text{ auf } X \otimes \mathbb{C}_p \\ \text{vom Grad Null} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Stetige Darstellungen} \\ \text{von } \pi_1(X, x) \text{ auf} \\ \mathbb{C}_p\text{-Vektorräumen} \end{array} \right\}$$

pss = potentiell stark semistabile Reduktion

p -adische Narasimhan–Seshadri Theorie

Klassisch: Korrespondenz zwischen stabilen Vektorbündeln vom Grad Null auf einer kompakten Riemannschen Fläche und irreduziblen unitären Darstellungen der Fundamentalgruppe (1964)

Geometrie \longleftrightarrow Gruppentheorie

p -adische Analogien (2005) durch Deninger–Werner und unabhängig Faltings

$X/\overline{\mathbb{Q}}_p$ glatte projektive Kurve. Volltreuer Funktor:

$$\rho : \left\{ \begin{array}{l} \text{pss-Vektorbündel } E \text{ auf } X \otimes \mathbb{C}_p \\ \text{vom Grad Null} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Stetige Darstellungen} \\ \text{von } \pi_1(X, x) \text{ auf} \\ \mathbb{C}_p\text{-Vektorräumen} \end{array} \right\}$$

pss = potentiell stark semistabile Reduktion

p -adische Narasimhan–Seshadri Theorie

Klassisch: Korrespondenz zwischen stabilen Vektorbündeln vom Grad Null auf einer kompakten Riemannschen Fläche und irreduziblen unitären Darstellungen der Fundamentalgruppe (1964)

Geometrie \longleftrightarrow Gruppentheorie

p -adische Analogien (2005) durch Deninger–Werner und unabhängig Faltings

$X/\overline{\mathbb{Q}}_p$ glatte projektive Kurve. Volltreuer Funktor:

$$\rho : \left\{ \begin{array}{l} \text{pss-Vektorbündel } E \text{ auf } X \otimes \mathbb{C}_p \\ \text{vom Grad Null} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Stetige Darstellungen} \\ \text{von } \pi_1(X, x) \text{ auf} \\ \mathbb{C}_p\text{-Vektorräumen} \end{array} \right\}$$

pss = potentiell stark semistabile Reduktion

p -adische Narasimhan–Seshadri Theorie

Klassisch: Korrespondenz zwischen stabilen Vektorbündeln vom Grad Null auf einer kompakten Riemannschen Fläche und irreduziblen unitären Darstellungen der Fundamentalgruppe (1964)

Geometrie \longleftrightarrow Gruppentheorie

p -adische Analogien (2005) durch Deninger–Werner und unabhängig Faltings

$X/\overline{\mathbb{Q}}_p$ glatte projektive Kurve. Volltreuer Funktor:

$$\rho : \left\{ \begin{array}{l} \text{pss-Vektorbündel } E \text{ auf } X \otimes \mathbb{C}_p \\ \text{vom Grad Null} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Stetige Darstellungen} \\ \text{von } \pi_1(X, x) \text{ auf} \\ \mathbb{C}_p\text{-Vektorräumen} \end{array} \right\}$$

pss = potentiell stark semistabile Reduktion

p -adische Narasimhan–Seshadri Theorie

Klassisch: Korrespondenz zwischen stabilen Vektorbündeln vom Grad Null auf einer kompakten Riemannschen Fläche und irreduziblen unitären Darstellungen der Fundamentalgruppe (1964)

Geometrie \longleftrightarrow Gruppentheorie

p -adische Analogien (2005) durch Deninger–Werner und unabhängig Faltings

$X/\overline{\mathbb{Q}}_p$ glatte projektive Kurve. Volltreuer Funktor:

$$\rho : \left\{ \begin{array}{l} \text{pss-Vektorbündel } E \text{ auf } X \otimes \mathbb{C}_p \\ \text{vom Grad Null} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Stetige Darstellungen} \\ \text{von } \pi_1(X, x) \text{ auf} \\ \mathbb{C}_p\text{-Vektorräumen} \end{array} \right\}$$

pss = potentiell stark semistabile Reduktion

Wichtigste Fragen

- ▶ **Vermutung** E semistabil $\Rightarrow E$ ist pss
 \Leftarrow bekannt
- ▶ Was ist das essentielle Bild von ρ ?
- ▶ **Vermutung** (pss) E stabil vom Grad Null $\Rightarrow \rho_E$ irreduzibel.

Wichtigste Fragen

- ▶ **Vermutung** E semistabil $\Rightarrow E$ ist pss
 \Leftarrow bekannt
- ▶ Was ist das essentielle Bild von ρ ?
- ▶ **Vermutung** (pss) E stabil vom Grad Null $\Rightarrow \rho_E$ irreduzibel.

Wichtigste Fragen

- ▶ **Vermutung** E semistabil $\Rightarrow E$ ist pss
 \Leftarrow bekannt
- ▶ Was ist das essentielle Bild von ρ ?
- ▶ **Vermutung** (pss) E stabil vom Grad Null $\Rightarrow \rho_E$ irreduzibel.

Weitere Projekte

- ▶ p -adische Goldman-Theorie: Dynamische Eigenschaften der Aktion durch die p -adische Abbildungsklassengruppe auf dem Modulraum semistabiler Vektorbündel vom Grad Null
- ▶ Bündel mit nicht-verschwindender Steigung
- ▶ Höherdimensionale Verallgemeinerungen

Weitere Projekte

- ▶ p -adische Goldman-Theorie: Dynamische Eigenschaften der Aktion durch die p -adische Abbildungsklassengruppe auf dem Modulraum semistabiler Vektorbündel vom Grad Null
- ▶ Bündel mit nicht-verschwindender Steigung
- ▶ Höherdimensionale Verallgemeinerungen

Weitere Projekte

- ▶ p -adische Goldman-Theorie: Dynamische Eigenschaften der Aktion durch die p -adische Abbildungsklassengruppe auf dem Modulraum semistabiler Vektorbündel vom Grad Null
- ▶ Bündel mit nicht-verschwindender Steigung
- ▶ Höherdimensionale Verallgemeinerungen

Dualität von Néron Modellen (Bosch)

- ▶ Modulräume von Geradenbündeln sind klassische Objekte, aber immer noch nicht vollständig verstanden.
- ▶ Grundlegendes Problem: Man verstehe das Néron-Modell von A'_K in Termen von Geradenbündeln auf dem Néron-Modell von A_K .
(A_K abelsche Varietät über diskret bewertetem Körper.)

Dualität von Néron Modellen (Bosch)

- ▶ Modulräume von Geradenbündeln sind klassische Objekte, aber immer noch nicht vollständig verstanden.
- ▶ Grundlegendes Problem: Man verstehe das Néron-Modell von A'_K in Termen von Geradenbündeln auf dem Néron-Modell von A_K . (A_K abelsche Varietät über diskret bewertetem Körper.)

Hilfe erhofft aus

A3 Modulräume

A2 Techniken zum Studium p -adischer Darstellungen

B Beziehungen zur klassischen differentialgeometrischen Theorie in höheren Dimensionen



WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

p -adische Gruppenalgebren

Projekt A 2 · SFB 878 · Groups, Geometry & Actions

P. Schneider



Zusammenfassung

- ▶ p -adische Gruppenringen treten in diversen Formen auf wie
 - ▶ komplettierte Gruppenringe $\mathbb{Z}_p[[G]]$ von Galoisgruppen G ,
 - ▶ Distributionenalgebren $D(G)$ lokal-analytischer Gruppen G ,
 - ▶ p -adische Analoga $c_0(\Gamma)$ von L^1 -Gruppenalgebren diskreter Gruppen Γ ;
- ▶ Weiterentwicklung der Strukturtheorie, Studium ihrer Modulkategorien, Berechnung von Invarianten wie z. B. algebraische K -Gruppen.
- ▶ Dies soll auf folgende Problemkreise angewendet werden:

Anwendungen

- ▶ Systematische Weiterentwicklung der stetigen Darstellungstheorie reductiver algebraischer Gruppen über p -adischen Körpern K .
- ▶ Entwicklung eines p -adischen lokalen Langlands-Programmes.
- ▶ Berechnung der algebraischen K -Gruppe $K_1(\mathbb{Z}_p[[G]]_S)$ (ist Rezipient p -adischer L -Funktionen in der nichtkommutativen Iwasawa-Theorie).
- ▶ (Deninger) Ausdehnung der Theorie der p -adischen Fuglede-Kadison Determinanten auf die Algebren $c_0(\Gamma)$.

Exemplarisch sei das Problem einer p -adischen Langlands-Korrespondenz skizziert:

$\mathbb{Q}_p \subseteq L \subseteq K$ endliche Körpererweiterungen.

$$\begin{array}{ccc}
 K\text{-adische Darst. von } W(\bar{L}/L) & \xrightarrow{\quad} & \text{top. irred. admissible } K\text{-Banach} \\
 & & \text{Darst. aller } GL_n(L) \\
 \text{\scriptsize Fon} \downarrow & & \downarrow \\
 \text{endlich-dim. diskrete} & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \text{irred. glatte } K\text{-Darst. aller } GL_n(L) \\
 K\text{-Darst. von } WD(\bar{L}/L) & &
 \end{array}$$

\mathcal{L} ist die klassische lokale Langlands-Korrespondenz + Verhalbeinfachung;
Fon ist ein von Fontaine in der Theorie der p -adischen Galoisdarstellungen konstruierter Funktor.

Strategie von Breuil zur Konstruktion von Banachdarstellungen:

Starte mit zwei “bekannteren” irreduziblen $G = GL_n(L)$ -Darstellungen:
 π glatt, σ rational \longrightarrow bilde Tensorproduktdarstellung $\pi \otimes \sigma$;
konstruiere **G -invariante Normen** auf $\pi \otimes \sigma$, so dass die zugehörige
Komplettierung admissibel ist.

Weitergehendes IDEALES ZIEL:

- ▶ Man gebe der Menge aller solcher Normen eine topologische oder besser geometrische Struktur.
- ▶ (mit Hartl, A3) Raum von Normen \cong p -adischer Periodenraum á la Kisin, Papas/Rapoport (dessen Punkte parametrisieren kristalline Galoisdarstellungen).

Hier kommen also Arithmetik, Darstellungstheorie, p -adische Analysis und Geometrie zusammen.



WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

Modulräume für G -Shtukas und Periodenbereiche

Projekt A3 · SFB 878 · Groups, Geometry & Actions

U. Hartl



Untersuchung der Struktur von Modulräumen für G -Shtukas:

- ▶ G ist reduktive Gruppe über einem Funktionenkörper, z.B. $\mathbb{F}_p(t)$
- ▶ diese Modulräume sind Funktionenkörper-Analogien von Shimura-Varietäten und Rapoport-Zink-Räumen
- ▶ Zusammenspiel verschiedener Stratifizierungen und algebraischer Blätterungen der Modulräume
- ▶ Rückschlüsse auf die Struktur von Shimura-Varietäten, Relevanz für das Langlands-Programm
- ▶ Verbindung zu Bruhat-Tits-Gebäuden (Projekt B4)

Auswahl von konkreten Problemen

Problem (Fragen von Manin und Grothendieck)

Manin: Unter welchen Bedingungen an das Newton-Polygon ν ist das Newton-Stratum \mathcal{N}_ν im Modulraum der G -Shtukas nicht leer?

Grothendieck: Liegt für alle Newton-Polygone $\nu' \preceq \nu$ das Newton-Stratum $\mathcal{N}_{\nu'}$ im Abschluss von \mathcal{N}_ν ?

Problem (Irreduzibilität der Newton-Stratifizierung)

Man bestimme Anzahl und Dimension der irreduziblen Komponenten der Newton-Strata \mathcal{N}_ν für die Modulräume der G -Shtukas und für PEL Shimura-Varietäten.

Weitere Schwerpunkte

p -adisches lokales Langlands-Programm (Projekt A2) :

- ▶ Korrespondenz

$$\left\{ \begin{array}{l} p\text{-adische Galois-} \\ \text{Darstellungen} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} p\text{-adische Banachraum-Darstellungen} \\ \text{von } p\text{-adischen Liegruppen} \end{array} \right\}$$

- ▶ beide variieren in analytischen Familien:
Pappas-Rapoport, Kisin Breuil-Schneider
- ▶ Ist die Korrespondenz durch einen analytischen Morphismus gegeben?

Periodenbereiche und Periodenmorphismen

- ▶ nach Pappas-Rapoport
- ▶ nach Rapoport-Zink
- ▶ für G -Shtukas
- ▶ Bilder der Periodenmorphismen



WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

Algebraische Gruppen und Modelltheorie

Projekt A 4 · SFB 878 · Groups, Geometry & Actions

K. Tent



Zusammenfassung

- ▶ Wirkungen von algebraischen Gruppen auf Gebäuden sollen benutzt werden, um modelltheoretische und algebraische Fragestellungen zu beantworten.
- ▶ Dies soll auf folgende Problemkreise angewendet werden, die in Zusammenhang mit anderen Projekten stehen:

Zusammenfassung

- ▶ Wirkungen von algebraischen Gruppen auf Gebäuden sollen benutzt werden, um modelltheoretische und algebraische Fragestellungen zu beantworten.
- ▶ Dies soll auf folgende Problemkreise angewendet werden, die in Zusammenhang mit anderen Projekten stehen:

Anwendungen

- ▶ Untersuchung von Moufang-Mengen und asymptotischem Verhalten von Gruppen.
- ▶ Konstruktion neuer Kohomologischer Invarianten für algebraische und Kac-Moody Gruppen (mit L. Kramer).
- ▶ Tits' Center Conjecture: Jeder konvexe Unterkomplex eines sphärischen Gebäudes ist vollständig reduzibel oder hat ein 'Zentrum'.
- ▶ Modelltheorie von algebraisch abgeschlossenen bewerteten Körpern.

Anwendungen

- ▶ Untersuchung von Moufang-Mengen und asymptotischem Verhalten von Gruppen.
- ▶ Konstruktion neuer Kohomologischer Invarianten für algebraische und Kac-Moody Gruppen (mit L. Kramer).
- ▶ Tits' Center Conjecture: Jeder konvexe Unterkomplex eines sphärischen Gebäudes ist vollständig reduzibel oder hat ein 'Zentrum'.
- ▶ Modelltheorie von algebraisch abgeschlossenen bewerteten Körpern.

Anwendungen

- ▶ Untersuchung von Moufang-Mengen und asymptotischem Verhalten von Gruppen.
- ▶ Konstruktion neuer Kohomologischer Invarianten für algebraische und Kac-Moody Gruppen (mit L. Kramer).
- ▶ Tits' Center Conjecture: Jeder konvexe Unterkomplex eines sphärischen Gebäudes ist vollständig reduzibel oder hat ein 'Zentrum'.
- ▶ Modelltheorie von algebraisch abgeschlossenen bewerteten Körpern.

Anwendungen

- ▶ Untersuchung von Moufang-Mengen und asymptotischem Verhalten von Gruppen.
- ▶ Konstruktion neuer Kohomologischer Invarianten für algebraische und Kac-Moody Gruppen (mit L. Kramer).
- ▶ Tits' Center Conjecture: Jeder konvexe Unterkomplex eines sphärischen Gebäudes ist vollständig reduzibel oder hat ein 'Zentrum'.
- ▶ Modelltheorie von algebraisch abgeschlossenen bewerteten Körpern.

Auswahl von konkreten Problemen

Problem (Kohomologie von Gruppen und Gebäuden)

Definiere stabile und natürliche 2-Kozykel für Gruppen mit 2-sphärischen Wurzeldaten, insbesondere für $SL(D)$.

Vermutung

Spezielle Moufang-Mengen sind genau die mit abelschen Wurzelgruppen. Eine Moufang-Menge von endlichem Morley-Rang ist isomorph zu $PSL_2(K)$, K algebraisch abgeschlossen.

Auswahl von konkreten Problemen

Problem (Kohomologie von Gruppen und Gebäuden)

Definiere stabile und natürliche 2-Kozykel für Gruppen mit 2-sphärischen Wurzeldaten, insbesondere für $SL(D)$.

Vermutung

Spezielle Moufang-Mengen sind genau die mit abelschen Wurzelgruppen. Eine Moufang-Menge von endlichem Morley-Rang ist isomorph zu $PSL_2(K)$, K algebraisch abgeschlossen.

Auswahl von konkreten Problemen

Problem (Kohomologie von Gruppen und Gebäuden)

Definiere stabile und natürliche 2-Kozykel für Gruppen mit 2-sphärischen Wurzeldaten, insbesondere für $SL(D)$.

Vermutung

Spezielle Moufang-Mengen sind genau die mit abelschen Wurzelgruppen. Eine Moufang-Menge von endlichem Morley-Rang ist isomorph zu $PSL_2(K)$, K algebraisch abgeschlossen.

Auswahl von konkreten Problemen

Problem (Kohomologie von Gruppen und Gebäuden)

Definiere stabile und natürliche 2-Kozykel für Gruppen mit 2-sphärischen Wurzeldata, insbesondere für $SL(D)$.

Vermutung

Spezielle Moufang-Mengen sind genau die mit abelschen Wurzelgruppen. Eine Moufang-Menge von endlichem Morley-Rang ist isomorph zu $PSL_2(K)$, K algebraisch abgeschlossen.

Problem (Modelltheorie algebraisch abgeschlossener bewerteter Körper ACVF)

- ▶ Charakterisiere die in ACVF definierbaren Mengen bis auf Isometrie. Dies verfeinert die Invarianten der motivischen Integration (I. Halupczok).
- ▶ Einbettungen von Fahnen-Varietäten algebraischer Gruppen in den Raum generisch stabiler Typen. (mit I. Halupczok, L. Kramer)
- ▶ Analysiere in ACVF definierbare Gruppen, insbesondere auflösbare oder einfache.

Problem (Modelltheorie algebraisch abgeschlossener bewerteter Körper ACVF)

- ▶ Charakterisiere die in ACVF definierbaren Mengen bis auf Isometrie. Dies verfeinert die Invarianten der motivischen Integration (I. Halupczok).
- ▶ Einbettungen von Fahnen-Varietäten algebraischer Gruppen in den Raum generisch stabiler Typen. (mit I. Halupczok, L. Kramer)
- ▶ Analysiere in ACVF definierbare Gruppen, insbesondere auflösbare oder einfache.

Problem (Modelltheorie algebraisch abgeschlossener bewerteter Körper ACVF)

- ▶ Charakterisiere die in ACVF definierbaren Mengen bis auf Isometrie. Dies verfeinert die Invarianten der motivischen Integration (I. Halupczok).
- ▶ Einbettungen von Fahnen-Varietäten algebraischer Gruppen in den Raum generisch stabiler Typen. (mit I. Halupczok, L. Kramer)
- ▶ Analysiere in ACVF definierbare Gruppen, insbesondere auflösbare oder einfache.

Weitere Schlüsselworte

- ▶ Pseudoendliche Gruppen und Strukturen.
- ▶ Berkovich-Räume und Räume generisch stabiler Typen.
- ▶ Stabile Gruppen und NIP-Theorien.
- ▶ Konstruktion neuer Gruppen mit speziellen Eigenschaften.



WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

Abstrakte Klassifikationstheorie: top. Räume, Gruppen und deskr. Mengenlehre

Projekt A5 · SFB 878 · Groups, Geometry & Actions

R. Schindler, K. Tent



Zusammenfassung

- ▶ Methoden der deskriptive Mengenlehre (insb. die Theorie der Borel-Äquivalenzrelationen) und der Modelltheorie sollen erweitert werden.
- ▶ Dies soll auf algebraische und geometrische Fragestellungen angewendet werden.

Zusammenfassung

- ▶ Methoden der deskriptive Mengenlehre (insb. die Theorie der Borel-Äquivalenzrelationen) und der Modelltheorie sollen erweitert werden.
- ▶ Dies soll auf algebraische und geometrische Fragestellungen angewendet werden.

Zusammenfassung

- ▶ Methoden der deskriptive Mengenlehre (insb. die Theorie der Borel-Äquivalenzrelationen) und der Modelltheorie sollen erweitert werden.
- ▶ Dies soll auf algebraische und geometrische Fragestellungen angewendet werden.

Anwendungen

- ▶ Automorphismengruppen erststufiger Strukturen.
- ▶ Klassifikation von Borel- und ∞ -Borel-Äquivalenzrelationen.
- ▶ Automorphismentürme abzählbarer und überabzählbarer Strukturen.
- ▶ Asymptotische Kegel.
- ▶ Zahme geordnete Strukturen (Fornasiero).

Anwendungen

- ▶ Automorphismengruppen erststufiger Strukturen.
- ▶ Klassifikation von Borel- und ∞ -Borel-Äquivalenzrelationen.
- ▶ Automorphismentürme abzählbarer und überabzählbarer Strukturen.
- ▶ Asymptotische Kegel.
- ▶ Zahme geordnete Strukturen (Fornasiero).

Anwendungen

- ▶ Automorphismengruppen erststufiger Strukturen.
- ▶ Klassifikation von Borel- und ∞ -Borel-Äquivalenzrelationen.
- ▶ Automorphismentürme abzählbarer und überabzählbarer Strukturen.
- ▶ Asymptotische Kegel.
- ▶ Zahme geordnete Strukturen (Fornasiero).

Anwendungen

- ▶ Automorphismengruppen erststufiger Strukturen.
- ▶ Klassifikation von Borel- und ∞ -Borel-Äquivalenzrelationen.
- ▶ Automorphismentürme abzählbarer und überabzählbarer Strukturen.
- ▶ Asymptotische Kegel.
- ▶ Zahme geordnete Strukturen (Fornasiero).

Anwendungen

- ▶ Automorphismengruppen erststufiger Strukturen.
- ▶ Klassifikation von Borel- und ∞ -Borel-Äquivalenzrelationen.
- ▶ Automorphismentürme abzählbarer und überabzählbarer Strukturen.
- ▶ Asymptotische Kegel.
- ▶ Zahme geordnete Strukturen (Fornasiero).

Auswahl von konkreten Problemen

Problem (Einfache Automorphismengruppen)

Konstruktion von neuen einfachen Gruppen mit interessanten Eigenschaften (z. B. small index property, überabzählbare Kofinalität, dichte lokal endliche Untergruppen).

Problem (Äquivalenzrelationen in Γ)

Sei E eine Äquivalenzrelation auf \mathbb{R} , $E \in \Gamma$, wobei Γ eine Punktklasse in der Wadge-Hierarchie ist.

Wenn E dünn ist, wie groß kann \mathbb{R}/E sein?

Wenn E nicht die Vitali-Äquivalenzrelation reduziert, läßt sich E durch $\text{id} \upharpoonright \mathcal{P}(\kappa)$ in einem Determiniertheitsmodell klassifizieren?

Auswahl von konkreten Problemen

Problem (Einfache Automorphismengruppen)

Konstruktion von neuen einfachen Gruppen mit interessanten Eigenschaften (z. B. small index property, überabzählbare Kofinalität, dichte lokal endliche Untergruppen).

Problem (Äquivalenzrelationen in Γ)

Sei E eine Äquivalenzrelation auf \mathbb{R} , $E \in \Gamma$, wobei Γ eine Punktklasse in der Wadge-Hierarchie ist.

Wenn E dünn ist, wie groß kann \mathbb{R}/E sein?

Wenn E nicht die Vitali-Äquivalenzrelation reduziert, läßt sich E durch $\text{id} \upharpoonright \mathcal{P}(\kappa)$ in einem Determiniertheitsmodell klassifizieren?

Auswahl von konkreten Problemen

Problem (Einfache Automorphismengruppen)

Konstruktion von neuen einfachen Gruppen mit interessanten Eigenschaften (z. B. small index property, überabzählbare Kofinalität, dichte lokal endliche Untergruppen).

Problem (Äquivalenzrelationen in Γ)

Sei E eine Äquivalenzrelation auf \mathbb{R} , $E \in \Gamma$, wobei Γ eine Punktklasse in der Wadge-Hierarchie ist.

Wenn E dünn ist, wie groß kann \mathbb{R}/E sein?

Wenn E nicht die Vitali-Äquivalenzrelation reduziert, läßt sich E durch $\text{id} \upharpoonright \mathcal{P}(\kappa)$ in einem Determiniertheitsmodell klassifizieren?

Auswahl von konkreten Problemen

Problem (Einfache Automorphismengruppen)

Konstruktion von neuen einfachen Gruppen mit interessanten Eigenschaften (z. B. small index property, überabzählbare Kofinalität, dichte lokal endliche Untergruppen).

Problem (Äquivalenzrelationen in Γ)

Sei E eine Äquivalenzrelation auf \mathbb{R} , $E \in \Gamma$, wobei Γ eine Punktklasse in der Wadge-Hierarchie ist.

Wenn E dünn ist, wie groß kann \mathbb{R}/E sein?

Wenn E nicht die Vitali-Äquivalenzrelation reduziert, läßt sich E durch $\text{id} \upharpoonright \mathcal{P}(\kappa)$ in einem Determiniertheitsmodell klassifizieren?

Auswahl von konkreten Problemen

Problem (Einfache Automorphismengruppen)

Konstruktion von neuen einfachen Gruppen mit interessanten Eigenschaften (z. B. small index property, überabzählbare Kofinalität, dichte lokal endliche Untergruppen).

Problem (Äquivalenzrelationen in Γ)

Sei E eine Äquivalenzrelation auf \mathbb{R} , $E \in \Gamma$, wobei Γ eine Punktklasse in der Wadge-Hierarchie ist.

Wenn E dünn ist, wie groß kann \mathbb{R}/E sein?

Wenn E nicht die Vitali-Äquivalenzrelation reduziert, läßt sich E durch $\text{id} \upharpoonright \mathcal{P}(\kappa)$ in einem Determiniertheitsmodell klassifizieren?

Problem (Höhen von Automorphismentürmen)

Sei κ eine abzählbare oder überabzählbare Kardinalzahl.

Berechne (in L , in V) das Supremum aller Höhen von Automorphismentürmen von zentrumslosen Gruppen der Größe κ !

Problem (Asymptotische Kegel)

Für welche Räume und für welche Ultrafilter ist die Bildung asymptotischer Kegels eine Abschlußoperation?

Problem (Höhen von Automorphismentürmen)

*Sei κ eine abzählbare oder überabzählbare Kardinalzahl.
Berechne (in L , in V) das Supremum aller Höhen von
Automorphismentürmen von zentrumslosen Gruppen der Größe κ !*

Problem (Asymptotische Kegel)

*Für welche Räume und für welche Ultrafilter ist die Bildung
asymptotischer Kegels eine Abschlußoperation?*

Problem (Höhen von Automorphisentürmen)

Sei κ eine abzählbare oder überabzählbare Kardinalzahl.

Berechne (in L , in V) das Supremum aller Höhen von Automorphisentürmen von zentrumslosen Gruppen der Größe κ !

Problem (Asymptotische Kegel)

Für welche Räume und für welche Ultrafilter ist die Bildung asymptotischer Kegels eine Abschlußoperation?

Weitere Schlüsselworte

- ▶ Polnische Räume.
- ▶ Fraïssé–Limiten, Hrushovski–Konstruktionen.
- ▶ Mäuse mit Woodin zahlen.
- ▶ “gaps” in Determiniertheitsmodellen.
- ▶ $CAT(0)$ –Räume.



WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

Singuläre Räume und Blätterungen

Projekt B1 · SFB 878 · Groups, Geometry & Actions

B. Wilking



Grundlagen

- ▶ Eine Folge Riemannscher Mannigfaltigkeiten (M_k, g_k, p_k) einer festen Dimension n mit $\text{Ricci} \geq -1$ und $p_k \in M_k$ besitzt nach Gromov eine konvergente Teilfolge $(M_k, p_k) \rightarrow (X, p)$.
- ▶ Der Raum X ist ein innerer metrischer Raum.
- ▶ Unterere Schnittkrümmungsschranken von M_k übertragen sich auf den Grenzraum im Sinne von Alexandrov.
- ▶ Liegen beidseitige Schnittkrümmungsschranken vor so sind die Phänomene, die beim Übergang von M_k zu X auftreten nach Cheeger Fukaya und Gromov weitgehend verstanden.
- ▶ Nach Cheeger und Colding ist für jeden generischen Punkt $p \in X$ der Tangentialkegel isometrisch zu einem euklidischen Raum.

Einige Probleme zu Grenträumen

Problem

Es sei X ein Grenzraum von zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten mit fester unterer Ricci Krümmungsschranke.

- *Haben alle euklidischen Tangentialkegel von X dieselbe Dimension?*
- *Ist die Menge der generischen Punkte konvex?*
- *Sind für eine auf einem offenen Intervall definierte Geodätische c die Tangentialkegel längs c isometrisch?*
- *Sind zwei Geodätische $c_1, c_2: [0, 1] \rightarrow X$ bereits gleich wenn sie auf einem Teilintervall übereinstimmen*

Ein Ansatzpunkt ist es, die Eigenschaften des Gradienten Flusses von Cheeger und Colding's harmonischen Funktionen auf $B_r(p_k) \subset M_k$ zu studieren.

Einige Probleme zu Grenzlräumen

Eine mögliche Anwendung wäre der Beweis der Milnorvermutung

Vermutung

Die Fundamentalgruppe einer vollständigen Mannigfaltigkeit mit nichtnegativer Ricci-Krümmung ist endlich erzeugt.

Weiterhin soll auch ein intrinsischer Ansatz für das Studium solcher Grenzlräume verfolgt werden.

- Sturm und Lott–Villani haben für einen metrischen Maßraum (X, d, ω) untere Ricci-Krümmungsschranken definiert.
- Gibt es eine modifizierte Definition, die es erlaubt mehr zu beweisen?
- Beziehungen zu C6.

Beziehungen zu singulären Blätterungen

Setzt man eine unterere Schnittkrümmungsschranke -1 für eine Folge von Mannigfaltigkeiten $M_k \rightarrow X$ voraus, gibt es die Hoffnung (vielleicht zu optimistisch), dass der Raum X hömoomorph zu einem metrischen Quotienten von M_k (mit leicht veränderter Metrik) ist.

Metrische Blätterungen und isometrische Gruppenwirkungen bilden daher einen weiteren wichtigen Forschungsschwerpunkt in diesem Projekt.

Theorem (Wilking '03,'06)

Es sei (M^n, g) eine nicht homogene einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit positiver Schnittkrümmung. Die Isometriegruppe G von M genüge eine der folgenden Bedingungen

- $\dim(G) \geq 2n - 6$,
- $\text{rang}(G) \geq \frac{n}{4} + 1$, $n \geq 9$ oder
- $\dim(M/G) =: k$ mit $18(k + 1)^2 \leq n$.

Dann ist M tangential homotopie-äquivalent zu einem Rang 1 symmetrischen Raum.

Theorem (Wilking '07)

Für eine nicht kompakte Mannigfaltigkeit mit nichtnegativer Krümmung M ist die Sharafutdinov Retraktion $P: M \rightarrow \Sigma$, die nach Perelman eine Riemannsche Submersion der Klasse $C^{1,1}$ ist, glatt.



WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

Geometrische Evolutionsgleichungen

Projekt B2 · SFB 878 · Groups, Geometry & Actions

C. Böhm B. Wilking



Zusammenfassung

- ▶ Auf geschlossenen Mannigfaltigkeiten soll der Ricci-Fluss untersucht werden, insbesondere die Formation von Singularitäten.
- ▶ In Dimension drei ist dies Perelman für beliebige Anfangsmetriken gelungen, so dass die Existenz eines Ricci-Flusses mit Chirurgie nachgewiesen werden konnte.
- ▶ In höheren Dimensionen ist es hilfreich, gewisse Krümmungsbedingungen an die Anfangsmetrik zu stellen.
- ▶ Solche invarianten Krümmungsbedingungen sollen mit Hilfe Lie-theoretischer Methoden entdeckt werden.

Anwendungen

- ▶ Zeige, dass die Krümmungsbedingung

$$\text{scal} > \sqrt{2(n-1)(n-2)} \cdot \|R_W\|$$

invariant unter dem Ricci-Fluss ist in Dimension $n \geq 12$. Hierbei bezeichnet R_W die Weylkrümmung.

- ▶ Zeige, dass die Klasse von Riemannschen Mannigfaltigkeiten, welche obiger Krümmungsbedingung genügt, invariant ist unter Chirurgie mit Kodimension größer $\frac{n}{2} + 1$.
- ▶ Fernziel: Ricci-Fluss mit Chirurgie für obige Klasse von Riemannschen Mannigfaltigkeiten.

Auswahl von konkreten Problemen

Satz (Invariante Krümmungsbedingungen, Wilking 2010)

Für eine Teilmenge $S \subset \mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ bezeichne

$$C(S) := \{R \in S_B^2(\mathfrak{so}(n)) \mid R(v, \bar{v}) \geq 0 \text{ für alle } v \in S\}$$

Ist S invariant unter der adjungierten Darstellung von $SO(n, \mathbb{C})$, so ist $C(S)$ eine Ricci-Fluss invariante Krümmungsbedingung.

Auswahl von konkreten Problemen

Satz (Invariante Krümmungsbedingungen, Wilking 2010)

Für eine Teilmenge $S \subset \mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ bezeichne

$$C(S) := \{R \in S_B^2(\mathfrak{so}(n)) \mid R(v, \bar{v}) \geq 0 \text{ für alle } v \in S\}$$

Ist S invariant unter der adjungierten Darstellung von $SO(n, \mathbb{C})$, so ist $C(S)$ eine Ricci-Fluss invariante Krümmungsbedingung.

Für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M^n, g) und $p \in M^n$ bezeichne $\varphi_{(M^n, g)}(p)$ den Winkel zwischen dem Krümmungsoperator R_p und der Identität I . Ferner bezeichne $\varphi_{S^k \times S^{n-k}}$ den Winkel zwischen dem Krümmungsoperator der symmetrischen Einsteinmannigfaltigkeit $S^k \times S^{n-k}$ und I , $2 \leq k \leq n-2$.

Problem (Einstein-Mannigfaltigkeiten mit kleiner Weylkrümmung)

Zeige, dass für $n \geq 12$ folgendes gilt:

Sei (M^n, g) kompakte Einsteinmannigfaltigkeit mit positiver Skalarkrümmung. Dann gilt

- Ist n gerade und $\varphi_{(M^n, g)}(p) \leq \varphi_{S^{n/2} \times S^{n/2}}$ für alle $p \in M^n$, so ist M^n lokal isometrisch zu S^n oder $S^{n/2} \times S^{n/2}$.
- Ist n ungerade und $\varphi_{(M^n, g)}(p) \leq \varphi_{S^{(n-1)/2} \times S^{(n+1)/2}}$ für alle $p \in M^n$, so ist M^n lokal isometrisch zu S^n oder $S^{(n-1)/2} \times S^{(n+1)/2}$.

Problem (Schwache Lyapunovfunktionen)

Zeige, dass in Dimension $n \geq 12$ die Funktion

$$L(R) = \frac{\|\text{Ric}(R)\|}{\|R\|}$$

längs Lösungen des Ricci-Flusses monoton fallend ist für Krümmungsoperatoren R mit

$$\text{scal}(R) > 0 \text{ und } L(R) \geq \sqrt{n-2}.$$

Klassifiziere ferner diejenigen Krümmungsoperatoren, für welche obige Funktion nicht strikt fallend ist.



WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

Geometrie der Skalkrümmung

Projekt B3 · SFB 878 · Groups, Geometry & Actions

J. Lohkamp



Generelle Fragestellung

Problem

Was ist die geometrische, physikalische und topologische Bedeutung der Skalarkrümmung ?

Welchen Einfluß haben Krümmungsbedingungen auf die Globale Analysis, Topologie und Asymptotische Geometrie des unterliegenden Raumes ?

Man kann eine beliebige Geometrie so deformieren, daß seine Skalarkrümmung $Scal < -1$ ist, ohne seine Metrik wesentlich zu stören (kleinste Störungen in der C^0 -Topologie genügen). Daher kann man sich auf den Effekt unterer Krümmungsschranken, wie $Scal > 0$, konzentrieren.

Es gibt zwei allgemeine Methoden solche Fragen anzugehen.

Für **Spin**-Mannigfaltigkeiten können mittels Atiyah-Singer Index Theorem und Bochner Techniken viele insbesondere topologische Hindernisse gegen die Existenz von $Scal > 0$ -Metriken gefunden werden (Lichnerowicz, Gromov, Lawson).

Generelle Fragestellung

Allerdings sind in höheren Dimensionen die meisten Mannigfaltigkeiten **Nicht-Spin**. Aber es gibt noch einen weiteren und geometrischeren Zugang (Schoen, Yau).

Hat die gegebene Mannigfaltigkeit eine $Scal > 0$ -Metrik so besitzt auch jede stabile minimale Hyperfläche eine $Scal > 0$ -Metrik. Dies führt bei geeigneter Wahl der Homologieklassen, in der diese Hyperfläche liegen soll, auf ein induktives Widerspruchs-Argument, welches mit einer Fläche mit positiver Gauss-Krümmung endet, die aber aus topologischen Gründen Geschlecht ≥ 1 hat.

Nachteil dieses Zugangs ist der analytische Aufwand und insbesondere die Tatsache, daß ab Dimension 8 zunehmend komplizierte Singularitäten auftreten, die diesen Zugang jahrzehntelang unpassierbar machten.

Eigene Vorarbeiten

Kombinationen von neuen Surgery und Minimalflächen Methoden erlauben es die bekannten Ergebnisse auf $\dim \geq 8$ zu erweitern und zugleich neue Resultate zu erhalten.

Für eine Mannigfaltigkeit M^{n+1} , $n \geq 7$ mit $Scal > 0$ und $\alpha \in H_n(M, \mathbf{Z})$, sei $H \in \alpha$ eine minimierende Hyperfläche mit Singularitäten $\Sigma \subset H$.

Theorem (Christ und L.)

Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Umgebung W_ε von Σ in einer ε -Umgebung von Σ , so daß $H \setminus W_\varepsilon$ eine glatte Metrik g_ε^+ besitzt mit

- ▶ g_ε^+ ist konform zur induzierten Metrik auf $H \setminus W_\varepsilon \subset M$
- ▶ $Scal(g_\varepsilon^+) > 0$
- ▶ ∂W_ε hat positive mittlere Krümmung

Eine wichtige Anwendung ist der Beweis des **Positive Energy Theorems**

Theorem (L.)

Sei M^n asymptotisch flach von Ordnung $> \frac{n-2}{2}$, $Scal \geq 0$, dann ist $E \geq 0$.

Projekt Beschreibung

Diese Methoden sollen sowohl weiterentwickelt als auch auf neue Problemstellungen angewendet werden. Typische Fragestellungen:

- ▶ Hindernisse für/gegen $Scal > 0$ auf n -Mannigfaltigkeiten, die in mehr als $n - 2$ Dimensionen *gross* sind
- ▶ Minimalflächen mit *weichen* Hindernissen
- ▶ Regularisierungsergebnisse für Minimalflächen und h -principles
- ▶ Induktiver Zugang zu anderen Krümmungsbedingungen
- ▶ Spin Geometrie, Torale Klassen und die Gromov-Lawson-Rosenberg Vermutung



WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

Reductive groups and combinatorial structures

Projekt B 4 · SFB 878 · Groups, Geometry & Actions

L. Kramer



Zusammenfassung

Wir untersuchen die globale Struktur von Euklidischen Gebäuden und reductiven Gruppen über bewerteten Körpern.

Es geht dabei um folgende Problemkreise:

- ▶ Grob-metrische Starrheitssätze
- ▶ Darstellungstheorie reductiver Gruppen
- ▶ Dynamik von Automorphismen und Fixpunktmenngen
- ▶ Charakterisierungen

Zusammenfassung

Wir untersuchen die globale Struktur von Euklidischen Gebäuden und reductiven Gruppen über bewerteten Körpern.

Es geht dabei um folgende Problemkreise:

- ▶ Grob-metrische Starrheitssätze
- ▶ Darstellungstheorie reductiver Gruppen
- ▶ Dynamik von Automorphismen und Fixpunktmenngen
- ▶ Charakterisierungen

Grob-metrische Starrheit

Theorem (Kramer-Weiss 09)

Wenn zwei Euklidische Gebäude grob-metrisch äquivalent sind, dann sind sie isometrisch.

(Prasad 1978, Kleiner-Leeb 1997, mit weiteren Annahmen)

Vermutung

Wenn zwei reductive Gruppen über vollständig (Krull) bewerteten Körpern grob-metrisch äquivalent sind, dann sind sie isomorph.

Stichworte: Mostow-Prasad Starrheit, quasi-Isometrien.

Methoden: CAT(0)-Räume, lokale Homologiegruppen, Tangential-Kegel, Gruppenwirkungen auf Bäumen.

Grob-metrische Starrheit

Theorem (Kramer-Weiss 09)

Wenn zwei Euklidische Gebäude grob-metrisch äquivalent sind, dann sind sie isometrisch.

(Prasad 1978, Kleiner-Leeb 1997, mit weiteren Annahmen)

Vermutung

Wenn zwei reduktive Gruppen über vollständig (Krull) bewerteten Körpern grob-metrisch äquivalent sind, dann sind sie isomorph.

Stichworte: Mostow-Prasad Starrheit, quasi-Isometrien.

Methoden: CAT(0)-Räume, lokale Homologiegruppen, Tangential-Kegel, Gruppenwirkungen auf Bäumen.

Grob-metrische Starrheit

Theorem (Kramer-Weiss 09)

Wenn zwei Euklidische Gebäude grob-metrisch äquivalent sind, dann sind sie isometrisch.

(Prasad 1978, Kleiner-Leeb 1997, mit weiteren Annahmen)

Vermutung

Wenn zwei reductive Gruppen über vollständig (Krull) bewerteten Körpern grob-metrisch äquivalent sind, dann sind sie isomorph.

Stichworte: Mostow-Prasad Starrheit, quasi-Isometrien.

Methoden: CAT(0)-Räume, lokale Homologiegruppen, Tangential-Kegel, Gruppenwirkungen auf Bäumen.

Problem

Die homologische Realisierung von Charakteristik- p -Darstellungen reductiver Gruppen über \mathbb{Q}_p durch Koeffizientensysteme auf Bruhat-Tits-Gebäuden. (Gemeinsam mit P. Schneider)

Stichworte: Modulare Darstellungen, azyklische Koeffizientensysteme.
Methoden: Äquivariante Koeffizientensysteme, lokale Struktur von Gebäuden.

Problem

Die homologische Realisierung von Charakteristik- p -Darstellungen reductiver Gruppen über \mathbb{Q}_p durch Koeffizientensysteme auf Bruhat-Tits-Gebäuden. (Gemeinsam mit P. Schneider)

Stichworte: Modulare Darstellungen, azyklische Koeffizientensysteme.
Methoden: Äquivariante Koeffizientensysteme, lokale Struktur von Gebäuden.

Automorphismen, Charakterisierungen

Problem

*Projektionen auf konvexe Teilmengen in Euklidischen Gebäuden.
Zerlegungssätze wie Kostants Konvexitätssatz über lokalen Körpern.
(P. Schwer)*

Problem

*Charakterisierungen von Euklidischen Gebäuden in der Klasse aller
geodätisch vollständigen $CAT(0)$ -Räume unter schwachen Annahmen.
Klassifikation der Homöomorphietypen kompakter Gebäude.*

Stichworte: Konvexität, Littelmanns Pfad-Modell, Rang-Starrheit.

Methoden: $CAT(0)$ -Räume, lokale Charakterisierungen, Chirurgie.

Automorphismen, Charakterisierungen

Problem

*Projektionen auf konvexe Teilmengen in Euklidischen Gebäuden.
Zerlegungssätze wie Kostants Konvexitätssatz über lokalen Körpern.
(P. Schwer)*

Problem

*Charakterisierungen von Euklidischen Gebäuden in der Klasse aller
geodätisch vollständigen $CAT(0)$ -Räume unter schwachen Annahmen.
Klassifikation der Homöomorphietypen kompakter Gebäude.*

Stichworte: Konvexität, Littelmanns Pfad-Modell, Rang-Starrheit.

Methoden: $CAT(0)$ -Räume, lokale Charakterisierungen, Chirurgie.

Automorphismen, Charakterisierungen

Problem

*Projektionen auf konvexe Teilmengen in Euklidischen Gebäuden.
Zerlegungssätze wie Kostants Konvexitätssatz über lokalen Körpern.
(P. Schwer)*

Problem

*Charakterisierungen von Euklidischen Gebäuden in der Klasse aller
geodätisch vollständigen $CAT(0)$ -Räume unter schwachen Annahmen.
Klassifikation der Homöomorphietypen kompakter Gebäude.*

Stichworte: Konvexität, Littelmanns Pfad-Modell, Rang-Starrheit.

Methoden: $CAT(0)$ -Räume, lokale Charakterisierungen, Chirurgie.

Querverbindungen

A2: p -adic group algebras.

A3: Moduli spaces of G -shtukas and period domains.

A4: Algebraic groups and model theory.

A5: Abstract classification theory: topological spaces, groups, and descriptive set theory.

B5: Rigidity.

C3: Group algebras.

C5: Random walks, branching, random media.



WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

Starrheit

Projekt B5 · SFB 878 · Groups, Geometry & Actions

A. Bartels W. Lück



Fragestellungen

Vermutung (Borel)

Seien M und N homotopieäquivalente geschlossene asphärische Mannigfaltigkeiten. Dann sind M und N homöomorph.

Problem

Sei G eine Poincaré-Dualitätsgruppe. Gibt es eine geschlossene asphärische Mannigfaltigkeit, deren Fundamentalgruppe G ist?

Problem

Sind quasi-isometrische nilpotente Liegruppen isomorph?

Fragestellungen

Vermutung (Borel)

Seien M und N homotopieäquivalente geschlossene asphärische Mannigfaltigkeiten. Dann sind M und N homöomorph.

Problem

Sei G eine Poincaré-Dualitätsgruppe. Gibt es eine geschlossene asphärische Mannigfaltigkeit, deren Fundamentalgruppe G ist?

Problem

Sind quasi-isometrische nilpotente Liegruppen isomorph?

Fragestellungen

Vermutung (Borel)

Seien M und N homotopieäquivalente geschlossene asphärische Mannigfaltigkeiten. Dann sind M und N homöomorph.

Problem

Sei G eine Poincaré-Dualitätsgruppe. Gibt es eine geschlossene asphärische Mannigfaltigkeit, deren Fundamentalgruppe G ist?

Problem

Sind quasi-isometrische nilpotente Liegruppen isomorph?

Methoden

- ▶ **Geometrische Gruppentheorie.**
(Nicht-positive Krümmung für Gruppen, CAT(0)-Geometrie (\rightarrow B4), Ränder von Gruppen, äquivariante asymptotische Dimension (\rightarrow B7), Flussräume).
- ▶ **Geometrische Topologie.**
(Kontrollierte Topologie, Chirurgietheorie, Waldhausens K -Theorie von Räumen, ANR-Homologiemannigfaltigkeiten).
- ▶ **Homotopietheorie.**
(Äquivariante Homologietheorien (\rightarrow B6), reelle Homotopietheorie und minimale Modelle, topologische zyklische Homologie, Ringspektren).
- ▶ **Algebra von Gruppenringen.**
(Algebraische K -Theorie, L -Theorie).
- ▶ **Modelltheorie? Zufallsgruppen?**

Methoden

- ▶ **Geometrische Gruppentheorie.**
(Nicht-positive Krümmung für Gruppen, CAT(0)-Geometrie (→ B4), Ränder von Gruppen, äquivariante asymptotische Dimension (→ B7), Flussräume).
- ▶ **Geometrische Topologie.**
(Kontrollierte Topologie, Chirurgietheorie, Waldhausens K -Theorie von Räumen, ANR-Homologiemannigfaltigkeiten).
- ▶ **Homotopietheorie.**
(Äquivariante Homologietheorien (→ B6), reelle Homotopietheorie und minimale Modelle, topologische zyklische Homologie, Ringspektren).
- ▶ **Algebra von Gruppenringen.**
(Algebraische K -Theorie, L -Theorie).
- ▶ **Modelltheorie? Zufallsgruppen?**

Methoden

- ▶ **Geometrische Gruppentheorie.**
(Nicht-positive Krümmung für Gruppen, CAT(0)-Geometrie (→ B4), Ränder von Gruppen, äquivariante asymptotische Dimension (→ B7), Flussräume).
- ▶ **Geometrische Topologie.**
(Kontrollierte Topologie, Chirurgietheorie, Waldhausens K -Theorie von Räumen, ANR-Homologiemannigfaltigkeiten).
- ▶ **Homotopietheorie.**
(Äquivariante Homologietheorien (→ B6), reelle Homotopietheorie und minimale Modelle, topologische zyklische Homologie, Ringspektren).
- ▶ **Algebra von Gruppenringen.**
(Algebraische K -Theorie, L -Theorie).
- ▶ **Modelltheorie? Zufallsgruppen?**

Methoden

- ▶ **Geometrische Gruppentheorie.**
(Nicht-positive Krümmung für Gruppen, CAT(0)-Geometrie (\rightarrow B4), Ränder von Gruppen, äquivariante asymptotische Dimension (\rightarrow B7), Flussräume).
- ▶ **Geometrische Topologie.**
(Kontrollierte Topologie, Chirurgietheorie, Waldhausens K -Theorie von Räumen, ANR-Homologiemannigfaltigkeiten).
- ▶ **Homotopietheorie.**
(Äquivariante Homologietheorien (\rightarrow B6), reelle Homotopietheorie und minimale Modelle, topologische zyklische Homologie, Ringspektren).
- ▶ **Algebra von Gruppenringen.**
(Algebraische K -Theorie, L -Theorie).
- ▶ **Modelltheorie? Zufallsgruppen?**

Methoden

- ▶ **Geometrische Gruppentheorie.**
(Nicht-positive Krümmung für Gruppen, CAT(0)-Geometrie (\rightarrow B4), Ränder von Gruppen, äquivariante asymptotische Dimension (\rightarrow B7), Flussräume).
- ▶ **Geometrische Topologie.**
(Kontrollierte Topologie, Chirurgietheorie, Waldhausens K -Theorie von Räumen, ANR-Homologiemannigfaltigkeiten).
- ▶ **Homotopietheorie.**
(Äquivariante Homologietheorien (\rightarrow B6), reelle Homotopietheorie und minimale Modelle, topologische zyklische Homologie, Ringspektren).
- ▶ **Algebra von Gruppenringen.**
(Algebraische K -Theorie, L -Theorie).
- ▶ **Modelltheorie? Zufallsgruppen?**

Vorarbeiten

Theorem (Bartels-Lück)

Die Borel-Vermutung gilt für geschlossene asphärische Mannigfaltigkeiten von Dimension ≥ 5 , falls die Fundamentalgruppe hyperbolisch ist.

Theorem (Bartels-Lück-Weinberger)

Sei G eine torsionsfreie hyperbolische Gruppe, deren Rand eine Sphäre von Dimension ≥ 5 ist. Dann wird G als Fundamentalgruppe einer geschlossenen asphärischen Mannigfaltigkeit realisiert.

Theorem (Sauer)

Seien G und H quasi-isometrische diskrete nilpotente Gruppen. Dann stimmen die reellen Kohomologieringe von G und H überein.

Weitere Fragestellungen und Verbindungen

- ▶ Farrell-Jones-Vermutung über die Struktur der algebraischen K - und L -Theorie von Gruppenringen (\rightarrow B6, B7).
- ▶ Homotopieinvarianz der höheren Signaturen (Novikov-Vermutung).
- ▶ Kaplansky-Vermutung über idempotente in Gruppenringen.
- ▶ Bass-Vermutung über den Hattori-Stallings-Rang.
- ▶ Homotopieinvarianz der L^2 -Torsion.
- ▶ Verschwinden der Whiteheadgruppe und der reduzierten Klassengruppe für torsionsfreie Gruppen.
- ▶ Baum-Connes-Vermutung (\rightarrow C3).



WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

Äquivariante Homotopie und Homologie

Projekt B6 · SFB 878 · Groups, Geometry & Actions

W. Lück



Zusammenfassung

- ▶ Die klassischen Begriffe und Techniken aus der äquivarianten Homotopie- und Homologietheorie für endliche Gruppen sollen auf unendliche Gruppen erweitert werden.
- ▶ Dies soll auf folgende Problemkreise angewendet werden, die in Zusammenhang mit anderen Projekten stehen:

Zusammenfassung

- ▶ Die klassischen Begriffe und Techniken aus der äquivarianten Homotopie- und Homologietheorie für endliche Gruppen sollen auf unendliche Gruppen erweitert werden.
- ▶ Dies soll auf folgende Problemkreise angewendet werden, die in Zusammenhang mit anderen Projekten stehen:

Zusammenfassung

- ▶ Die klassischen Begriffe und Techniken aus der äquivarianten Homotopie- und Homologietheorie für endliche Gruppen sollen auf unendliche Gruppen erweitert werden.
- ▶ Dies soll auf folgende Problemkreise angewendet werden, die in Zusammenhang mit anderen Projekten stehen:

Anwendungen

- ▶ Berechnung und Analyse der (Ko-)Homologie und der topologischen K -Theorie von klassifizierenden Räumen von Gruppen. (B5,C3).
- ▶ Berechnung und Analyse der K - und L -Theorie von Gruppenringen und Gruppen- C^* -Algebren. (C1,C2,C3).
- ▶ Klassifikation von Mannigfaltigkeiten und Gruppenoperationen (B2,B5).
- ▶ Existenz von Riemannschen Metriken mit positiver Skalarkrümmung. (B3).
- ▶ Orbifaltigkeiten und singuläre Räume.

Anwendungen

- ▶ Berechnung und Analyse der (Ko-)Homologie und der topologischen K -Theorie von klassifizierenden Räumen von Gruppen. (B5,C3).
- ▶ Berechnung und Analyse der K - und L -Theorie von Gruppenringen und Gruppen- C^* -Algebren. (C1,C2,C3).
- ▶ Klassifikation von Mannigfaltigkeiten und Gruppenoperationen (B2,B5).
- ▶ Existenz von Riemannschen Metriken mit positiver Skalarkrümmung. (B3).
- ▶ Orbifaltigkeiten und singuläre Räume.

Anwendungen

- ▶ Berechnung und Analyse der (Ko-)Homologie und der topologischen K -Theorie von klassifizierenden Räumen von Gruppen. (B5,C3).
- ▶ Berechnung und Analyse der K - und L -Theorie von Gruppenringen und Gruppen- C^* -Algebren. (C1,C2,C3).
- ▶ Klassifikation von Mannigfaltigkeiten und Gruppenoperationen (B2,B5).
- ▶ Existenz von Riemannschen Metriken mit positiver Skalarkrümmung. (B3).
- ▶ Orbifaltigkeiten und singuläre Räume.

Anwendungen

- ▶ Berechnung und Analyse der (Ko-)Homologie und der topologischen K -Theorie von klassifizierenden Räumen von Gruppen. (B5,C3).
- ▶ Berechnung und Analyse der K - und L -Theorie von Gruppenringen und Gruppen- C^* -Algebren. (C1,C2,C3).
- ▶ Klassifikation von Mannigfaltigkeiten und Gruppenoperationen (B2,B5).
- ▶ Existenz von Riemannschen Metriken mit positiver Skalarkrümmung. (B3).
- ▶ Orbifaltigkeiten und singuläre Räume.

Anwendungen

- ▶ Berechnung und Analyse der (Ko-)Homologie und der topologischen K -Theorie von klassifizierenden Räumen von Gruppen. (B5,C3).
- ▶ Berechnung und Analyse der K - und L -Theorie von Gruppenringen und Gruppen- C^* -Algebren. (C1,C2,C3).
- ▶ Klassifikation von Mannigfaltigkeiten und Gruppenoperationen (B2,B5).
- ▶ Existenz von Riemannschen Metriken mit positiver Skalarkrümmung. (B3).
- ▶ Orbifaltigkeiten und singuläre Räume.

Auswahl von konkreten Problemen

Problem (Äquivariante Homotopiekategorie)

Definiere die äquivariante Homotopiekategorie für *eigentliche Operationen* von *unendlichen diskreten Gruppen* bzw. *Lie-Gruppen*.

Vermutung (Segal Vermutung für unendliche Gruppen)

Sei G eine *diskrete Gruppe*, die ein *kokompaktes Modell* für ihren *klassifizierenden Raum* von *eigentlichen Operationen* besitzt. Dann gibt es einen *Isomorphismus*

$$\pi_G^m(\underline{EG})_{\mathbb{I}_G(\underline{EG})} \xrightarrow{\cong} \pi_s^m(BG).$$

Auswahl von konkreten Problemen

Problem (Äquivariante Homotopiekategorie)

Definiere die äquivariante Homotopiekategorie für *eigentliche Operationen* von *unendlichen diskreten Gruppen* bzw. *Lie-Gruppen*.

Vermutung (Segal Vermutung für unendliche Gruppen)

Sei G eine *diskrete Gruppe*, die ein *kokompaktes Modell* für ihren *klassifizierenden Raum* von *eigentlichen Operationen* besitzt. Dann gibt es einen *Isomorphismus*

$$\pi_G^m(\underline{EG})_{\mathbb{I}_G(\underline{EG})} \xrightarrow{\cong} \pi_s^m(BG).$$

Auswahl von konkreten Problemen

Problem (Äquivariante Homotopiekategorie)

Definiere die äquivariante Homotopiekategorie für eigentliche Operationen von unendlichen diskreten Gruppen bzw. Lie-Gruppen.

Vermutung (Segal Vermutung für unendliche Gruppen)

Sei G eine diskrete Gruppe, die ein kokompaktes Modell für ihren klassifizierenden Raum von eigentlichen Operationen besitzt. Dann gibt es einen Isomorphismus

$$\pi_G^m(\underline{E}G)_{\mathbb{I}_G(\underline{E}G)} \xrightarrow{\cong} \pi_S^m(BG).$$

Problem (Kristallographische Gruppen)

Berechne die K - und L -Gruppen von RG , die topologische K -Theorie von $C^*(G)$ und die K -Theorie and (Ko-)Homologie von BG und $G \backslash \underline{E}G$ für $G = \mathbb{Z}^d \rtimes \mathbb{Z}/n$.

Problem (Torusbündel über Linsenräumen)

Klassifiziere Mannigfaltigkeiten, die Totalräume von Torusbündeln über Linsenräumen sind, bis auf Homotopie, Homöomorphie und Diffeomorphie.

Problem (Kristallographische Gruppen)

Berechne die K - und L -Gruppen von RG , die topologische K -Theorie von $C^*(G)$ und die K -Theorie and (Ko-)Homologie von BG und $G \backslash \underline{E}G$ für $G = \mathbb{Z}^d \rtimes \mathbb{Z}/n$.

Problem (Torusbündel über Linsenräumen)

Klassifiziere Mannigfaltigkeiten, die Totalräume von Torusbündeln über Linsenräumen sind, bis auf Homotopie, Homöomorphie und Diffeomorphie.

Weitere Schlüsselworte

- ▶ Klassifizierende Räume von Familien von Untergruppen.
- ▶ Konnektive topologische K -Theorie von endlichen Gruppen.
- ▶ Freed-Hopkins-Telemann Isomorphismus.
- ▶ Lubin-Tate-Spektren.
- ▶ Charakteristische Klassen von singulären Räumen.
- ▶ Grothendieck- und Witt-Gruppen von äquivarianten Garben



WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

Messbare Gruppentheorie und L^2 -Invarianten

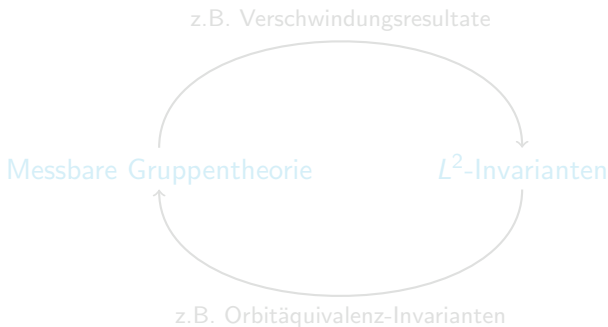
Projekt B7 · SFB 878 · Groups, Geometry & Actions

C. Löh W. Lück R. Sauer



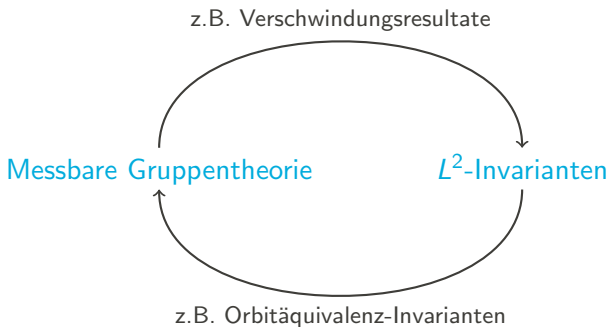
Zusammenfassung

- ▶ **Messbare Gruppentheorie** untersucht die Struktur maßerhaltender Operationen abzählbarer Gruppen – bis auf Orbitäquivalenz.
- ▶ **L^2 -Invarianten** sind analytisch definierte Invarianten von Räumen, auf denen eine diskrete Gruppe operiert.



Zusammenfassung

- ▶ **Messbare Gruppentheorie** untersucht die Struktur maßerhaltender Operationen abzählbarer Gruppen – bis auf Orbitäquivalenz.
- ▶ **L^2 -Invarianten** sind analytisch definierte Invarianten von Räumen, auf denen eine diskrete Gruppe operiert.



Vermutungen und Fragestellungen

Vermutung (Hopf-Singer)

Die i -te L^2 -Bettizahl einer geschlossenen asphärischen n -dimensionalen Mannigfaltigkeit verschwindet, falls $2i \neq n$.

Problem (Gromov)

Sei M eine geschlossene asphärische Mannigfaltigkeit. Impliziert das Verschwinden des simplizialen Volumens von M das Verschwinden der L^2 -Bettizahlen von M ?

Problem (Furman)

Ist eine Gruppe, die maquivalent zu einem Gitter in einer einfachen Liegruppe G ist, (virtuell) ein Gitter in G ?

Vermutungen und Fragestellungen

Vermutung (Atiyah)

Sei Γ eine torsionsfreie Gruppe. Dann sind die L^2 -Bettizahlen eines freien, endlichen Γ -CW-Komplexes ganzzahlig.

Vermutung

Sei $\Gamma = \Gamma_0 \supset \Gamma_1 \supset \dots$ eine absteigende Folge normaler Untergruppen von endlichem Index, deren gemeinsamer Schnitt trivial ist. Für einen endlichen Γ -CW-Komplex X und jede Primzahl p existiert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_i(\Gamma_n \backslash X; \mathbb{F}_p)}{[\Gamma : \Gamma_n]}$$

und ist unabhängig von der Wahl der Folge (Γ_n) .

Methoden und Querverbindungen

- ▶ **Ergodentheorie** → C5
(Poissonrand, Perkolation, Irrfahrten)
- ▶ **von-Neumann-Algebren** → C6
(v.N.-Algebren von Blätterungen, L^2 -Bettizahlen von v.N.-Algebren)
- ▶ **Exotische Kohomologietheorien**
(beschränkte Kohomologie, L^1 -Homologie)
- ▶ **Algebra von Gruppenringen** → B5, C3
(algebraische K- und G-Theorie, nichtkommutative Lokalisierung)
- ▶ **Globale Analysis**
(transversale Indexsätze)

Methoden und Querverbindungen

- ▶ **Ergodentheorie** → C5
(Poissonrand, Perkolation, Irrfahrten)
- ▶ **von-Neumann-Algebren** → C6
(v.N.-Algebren von Blätterungen, L^2 -Bettizahlen von v.N.-Algebren)
- ▶ **Exotische Kohomologietheorien**
(beschränkte Kohomologie, L^1 -Homologie)
- ▶ **Algebra von Gruppenringen** → B5, C3
(algebraische K- und G-Theorie, nichtkommutative Lokalisierung)
- ▶ **Globale Analysis**
(transversale Indexsätze)



WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

Nichtkommutative Dynamische Systeme

Projekt C1 · SFB 878 · Groups, Geometry & Actions

J.Cuntz T.Timmermann



Zusammenfassung

- ▶ Das Projekt untersucht Operatoralgebren, die mit verschiedenen dynamischen Systemen und Gruppenwirkungen assoziiert sind. Operatoralgebraische Hilfsmittel werden verwendet, um dynamische Systeme zu analysieren.
- ▶ Untersucht werden einerseits Probleme ergodentheoretischer Natur, andererseits aber auch die Frage, wie sich das dynamische System in der assoziierten Algebra widerspiegelt. Dazu gehören ein Studium der Idealstruktur, der K -Theorie und der Dualitätstheorie.

Zusammenfassung

- ▶ Das Projekt untersucht Operatoralgebren, die mit verschiedenen dynamischen Systemen und Gruppenwirkungen assoziiert sind. Operatoralgebraische Hilfsmittel werden verwendet, um dynamische Systeme zu analysieren.
- ▶ Untersucht werden einerseits Probleme ergodentheoretischer Natur, andererseits aber auch die Frage, wie sich das dynamische System in der assoziierten Algebra widerspiegelt. Dazu gehören ein Studium der Idealstruktur, der K -Theorie und der Dualitätstheorie.

Übersicht

Das Projekt umfasst folgende Bereiche:

- ▶ C^* -Algebren, die mit nullteilerfreien Ringen assoziiert sind (Cuntz, Li). (Hier wurden seit Formulierung des Antrags noch bedeutende Fortschritte erzielt).
- ▶ Algebraische Dynamische Systeme und ihre ergodentheoretischen Eigenschaften, Verwendung von Methoden aus der Theorie der Operatoralgebren (Deninger, Cuntz)
- ▶ Dualitätstheorie für dynamische Systeme und Gruppoide (Timmermann).
- ▶ Idealstruktur und Darstellungstheorie von verschränkten Produkten für Gruppenwirkungen auf einem lokalkompakten Raum (Echterhoff, Cuntz).

Übersicht

Das Projekt umfasst folgende Bereiche:

- ▶ C^* -Algebren, die mit nullteilerfreien Ringen assoziiert sind (Cuntz, Li). (Hier wurden seit Formulierung des Antrags noch bedeutende Fortschritte erzielt).
- ▶ Algebraische Dynamische Systeme und ihre ergodentheoretischen Eigenschaften, Verwendung von Methoden aus der Theorie der Operatoralgebren (Deninger, Cuntz)
- ▶ Dualitätstheorie für dynamische Systeme und Gruppoide (Timmermann).
- ▶ Idealstruktur und Darstellungstheorie von verschränkten Produkten für Gruppenwirkungen auf einem lokalkompakten Raum (Echterhoff, Cuntz).

Übersicht

Das Projekt umfasst folgende Bereiche:

- ▶ C^* -Algebren, die mit nullteilerfreien Ringen assoziiert sind (Cuntz, Li). (Hier wurden seit Formulierung des Antrags noch bedeutende Fortschritte erzielt).
- ▶ Algebraische Dynamische Systeme und ihre ergodentheoretischen Eigenschaften, Verwendung von Methoden aus der Theorie der Operatoralgebren (Deninger, Cuntz)
- ▶ Dualitätstheorie für dynamische Systeme und Gruppoide (Timmermann).
- ▶ Idealstruktur und Darstellungstheorie von verschränkten Produkten für Gruppenwirkungen auf einem lokalkompakten Raum (Echterhoff, Cuntz).

Übersicht

Das Projekt umfasst folgende Bereiche:

- ▶ C^* -Algebren, die mit nullteilerfreien Ringen assoziiert sind (Cuntz, Li). (Hier wurden seit Formulierung des Antrags noch bedeutende Fortschritte erzielt).
- ▶ Algebraische Dynamische Systeme und ihre ergodentheoretischen Eigenschaften, Verwendung von Methoden aus der Theorie der Operatoralgebren (Deninger, Cuntz)
- ▶ Dualitätstheorie für dynamische Systeme und Gruppoide (Timmermann).
- ▶ Idealstruktur und Darstellungstheorie von verschränkten Produkten für Gruppenwirkungen auf einem lokalkompakten Raum (Echterhoff, Cuntz).

Problemstellungen

- ▶ Struktur der C^* -Algebren, die mit Ringen von ganzen Zahlen in globalen Körpern assoziiert sind. Damit zusammenhängende Probleme ergodentheoretischer und K -theoretischer Natur.
- ▶ Berechnung und dynamische Interpretation von Fuglede-Kadison Determinanten.
- ▶ Dualitätsresultate für Quantengruppoide.
- ▶ Beschreibung von verschränkten Produkten $C_0(X) \rtimes G$ durch Strata mit stetiger Spur, Berechnung der K -Theorie.

Problemstellungen

- ▶ Struktur der C^* -Algebren, die mit Ringen von ganzen Zahlen in globalen Körpern assoziiert sind. Damit zusammenhängende Probleme ergodentheoretischer und K -theoretischer Natur.
- ▶ Berechnung und dynamische Interpretation von Fuglede-Kadison Determinanten.
- ▶ Dualitätsresultate für Quantengruppoide.
- ▶ Beschreibung von verschränkten Produkten $C_0(X) \rtimes G$ durch Strata mit stetiger Spur, Berechnung der K -Theorie.

Problemstellungen

- ▶ Struktur der C^* -Algebren, die mit Ringen von ganzen Zahlen in globalen Körpern assoziiert sind. Damit zusammenhängende Probleme ergodentheoretischer und K -theoretischer Natur.
- ▶ Berechnung und dynamische Interpretation von Fuglede-Kadison Determinanten.
- ▶ Dualitätsresultate für Quantengruppoide.
- ▶ Beschreibung von verschränkten Produkten $C_0(X) \rtimes G$ durch Strata mit stetiger Spur, Berechnung der K -Theorie.

Problemstellungen

- ▶ Struktur der C^* -Algebren, die mit Ringen von ganzen Zahlen in globalen Körpern assoziiert sind. Damit zusammenhängende Probleme ergodentheoretischer und K -theoretischer Natur.
- ▶ Berechnung und dynamische Interpretation von Fuglede-Kadison Determinanten.
- ▶ Dualitätsresultate für Quantengruppoide.
- ▶ Beschreibung von verschränkten Produkten $C_0(X) \rtimes G$ durch Strata mit stetiger Spur, Berechnung der K -Theorie.

Auswahl von konkreten Problemen

Problem (K-Theorie)

Berechne die K-Theorie der Ring- C^ -Algebra im Fall von Zahlkörpern mit allgemeinen Einheitswurzeln (enge Beziehungen zu B6 und zu C2).*

Problem (Furstenberg-Problem)

Untersuche höherdimensionale Analoga des Furstenberg-Problems für die Wirkung von ganzen Elementen in einem Zahlkörper durch Multiplikation.

Problem (Determinanten)

Berechne Determinanten für die Gruppen-von-Neumann-Algebra für endlich erzeugte nilpotente Gruppen (Beziehungen zu A2, B7, C6).

Auswahl von konkreten Problemen

Problem (K-Theorie)

Berechne die K-Theorie der Ring-C-Algebra im Fall von Zahlkörpern mit allgemeinen Einheitswurzeln (enge Beziehungen zu B6 und zu C2).*

Problem (Furstenberg-Problem)

Untersuche höherdimensionale Analoga des Furstenberg-Problems für die Wirkung von ganzen Elementen in einem Zahlkörper durch Multiplikation.

Problem (Determinanten)

Berechne Determinanten für die Gruppen-von-Neumann-Algebra für endlich erzeugte nilpotente Gruppen (Beziehungen zu A2, B7, C6).

Auswahl von konkreten Problemen

Problem (K-Theorie)

Berechne die K-Theorie der Ring-C-Algebra im Fall von Zahlkörpern mit allgemeinen Einheitswurzeln (enge Beziehungen zu B6 und zu C2).*

Problem (Furstenberg-Problem)

Untersuche höherdimensionale Analoga des Furstenberg-Problems für die Wirkung von ganzen Elementen in einem Zahlkörper durch Multiplikation.

Problem (Determinanten)

Berechne Determinanten für die Gruppen-von-Neumann-Algebra für endlich erzeugte nilpotente Gruppen (Beziehungen zu A2, B7, C6).

Auswahl von konkreten Problemen

Problem (K-Theorie)

Berechne die K-Theorie der Ring-C-Algebra im Fall von Zahlkörpern mit allgemeinen Einheitswurzeln (enge Beziehungen zu B6 und zu C2).*

Problem (Furstenberg-Problem)

Untersuche höherdimensionale Analoga des Furstenberg-Problems für die Wirkung von ganzen Elementen in einem Zahlkörper durch Multiplikation.

Problem (Determinanten)

Berechne Determinanten für die Gruppen-von-Neumann-Algebra für endlich erzeugte nilpotente Gruppen (Beziehungen zu A2, B7, C6).

Problem (Quantengruppoide)

Zeige, dass jedes kommutative C^ -pseudomultiplikative Unitäre von einem lokalkompakten Hausdorff-Gruppoid kommt (Beziehungen zu C3, C4).*

Problem (Verschränkte Produkte)

Bestimme die K -Theorie für verschränkte Produkte $C_0(X) \rtimes G$ im Fall, wo nur isolierte Punkte mit nichttrivialer Isotropie existieren (enge Beziehungen zu C3).

Problem (Quantengruppoide)

Zeige, dass jedes kommutative C^ -pseudomultiplikative Unitäre von einem lokalkompakten Hausdorff-Gruppoid kommt (Beziehungen zu C3, C4).*

Problem (Verschränkte Produkte)

Bestimme die K -Theorie für verschränkte Produkte $C_0(X) \rtimes G$ im Fall, wo nur isolierte Punkte mit nichttrivialer Isotropie existieren (enge Beziehungen zu C3).



WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

Struktur nichtkommutativer Algebren und Gruppenwirkungen

Projekt C2 · SFB 878 · Groups, Geometry & Actions

J. Cuntz C. Voigt



Zusammenfassung

- ▶ Eine entscheidende Rolle bei der Untersuchung nichtkommutativer Algebren spielen verschiedene Versionen von K -Theorie und zyklischer Kohomologie.
- ▶ In diesem Projekt sollen diese Theorien ausgebaut und auf konkrete Probleme angewendet werden.
- ▶ Dies beinhaltet insbesondere Fragestellungen, die in Zusammenhang mit anderen Projekten stehen.

Zusammenfassung

- ▶ Eine entscheidende Rolle bei der Untersuchung nichtkommutativer Algebren spielen verschiedene Versionen von K -Theorie und zyklischer Kohomologie.
- ▶ In diesem Projekt sollen diese Theorien ausgebaut und auf konkrete Probleme angewendet werden.
- ▶ Dies beinhaltet insbesondere Fragestellungen, die in Zusammenhang mit anderen Projekten stehen.

Zusammenfassung

- ▶ Eine entscheidende Rolle bei der Untersuchung nichtkommutativer Algebren spielen verschiedene Versionen von K -Theorie und zyklischer Kohomologie.
- ▶ In diesem Projekt sollen diese Theorien ausgebaut und auf konkrete Probleme angewendet werden.
- ▶ Dies beinhaltet insbesondere Fragestellungen, die in Zusammenhang mit anderen Projekten stehen.

Zusammenfassung

- ▶ Eine entscheidende Rolle bei der Untersuchung nichtkommutativer Algebren spielen verschiedene Versionen von K -Theorie und zyklischer Kohomologie.
- ▶ In diesem Projekt sollen diese Theorien ausgebaut und auf konkrete Probleme angewendet werden.
- ▶ Dies beinhaltet insbesondere Fragestellungen, die in Zusammenhang mit anderen Projekten stehen.

Problemstellungen und Ziele

- ▶ Anwendungen der bivarianten K -Theorie für lokalkonvexe Algebren (Beziehungen zu C3).
- ▶ Ausbau und Berechnungen der äquivarianten zyklischen Homologie für Wirkungen von Liegruppen und Quantengruppen (Beziehungen zu B6, C1, C3).
- ▶ Nichtkommutativer Zugang zu äquivarianter elliptischer Kohomologie (Beziehungen zu C4).
- ▶ K -Theorie für spezielle C^* -Algebren, Cuntz-Halbgruppe und Dimensionsfunktionen (Beziehungen zu B7, C1, C3).

Problemstellungen und Ziele

- ▶ Anwendungen der bivarianten K -Theorie für lokalkonvexe Algebren (Beziehungen zu C3).
- ▶ Ausbau und Berechnungen der äquivarianten zyklischen Homologie für Wirkungen von Liegruppen und Quantengruppen (Beziehungen zu B6, C1, C3).
- ▶ Nichtkommutativer Zugang zu äquivarianter elliptischer Kohomologie (Beziehungen zu C4).
- ▶ K -Theorie für spezielle C^* -Algebren, Cuntz-Halbgruppe und Dimensionsfunktionen (Beziehungen zu B7, C1, C3).

Problemstellungen und Ziele

- ▶ Anwendungen der bivarianten K -Theorie für lokalkonvexe Algebren (Beziehungen zu C3).
- ▶ Ausbau und Berechnungen der äquivarianten zyklischen Homologie für Wirkungen von Liegruppen und Quantengruppen (Beziehungen zu B6, C1, C3).
- ▶ Nichtkommutativer Zugang zu äquivarianter elliptischer Kohomologie (Beziehungen zu C4).
- ▶ K -Theorie für spezielle C^* -Algebren, Cuntz-Halbgruppe und Dimensionsfunktionen (Beziehungen zu B7, C1, C3).

Problemstellungen und Ziele

- ▶ Anwendungen der bivarianten K -Theorie für lokalkonvexe Algebren (Beziehungen zu C3).
- ▶ Ausbau und Berechnungen der äquivarianten zyklischen Homologie für Wirkungen von Liegruppen und Quantengruppen (Beziehungen zu B6, C1, C3).
- ▶ Nichtkommutativer Zugang zu äquivarianter elliptischer Kohomologie (Beziehungen zu C4).
- ▶ K -Theorie für spezielle C^* -Algebren, Cuntz-Halbgruppe und Dimensionsfunktionen (Beziehungen zu B7, C1, C3).

Problemstellungen und Ziele

- ▶ Anwendungen der bivarianten K -Theorie für lokalkonvexe Algebren (Beziehungen zu C3).
- ▶ Ausbau und Berechnungen der äquivarianten zyklischen Homologie für Wirkungen von Liegruppen und Quantengruppen (Beziehungen zu B6, C1, C3).
- ▶ Nichtkommutativer Zugang zu äquivarianter elliptischer Kohomologie (Beziehungen zu C4).
- ▶ K -Theorie für spezielle C^* -Algebren, Cuntz-Halbgruppe und Dimensionsfunktionen (Beziehungen zu B7, C1, C3).

Auswahl konkreter Probleme

Problem (*K*-Homologie)

Untersuche die Darstellbarkeit der K -Homologie durch summierbare Fredholm-Moduln.

Problem (Bivariante *K*-Theorie)

Beweise den Thom-Isomorphismus im Rahmen lokalkonvexer Algebren.

Problem (Zyklische Homologie)

Berechne die zyklische Homologie für orthogonale und unitäre freie Quantengruppen.

Problem (Witten-Rigidität)

Beweise die Wittenschen Rigiditätssätze neu im Rahmen einer nichtkommutativen elliptischen Kohomologietheorie.

Auswahl konkreter Probleme

Problem (*K*-Homologie)

Untersuche die Darstellbarkeit der K -Homologie durch summierbare Fredholm-Moduln.

Problem (Bivariante K -Theorie)

Beweise den Thom-Isomorphismus im Rahmen lokalkonvexer Algebren.

Problem (Zyklische Homologie)

Berechne die zyklische Homologie für orthogonale und unitäre freie Quantengruppen.

Problem (Witten-Rigidität)

Beweise die Wittenschen Rigiditätssätze neu im Rahmen einer nichtkommutativen elliptischen Kohomologietheorie.

Auswahl konkreter Probleme

Problem (*K*-Homologie)

Untersuche die Darstellbarkeit der K -Homologie durch summierbare Fredholm-Moduln.

Problem (Bivariante *K*-Theorie)

Beweise den Thom-Isomorphismus im Rahmen lokalkonvexer Algebren.

Problem (Zyklische Homologie)

Berechne die zyklische Homologie für orthogonale und unitäre freie Quantengruppen.

Problem (Witten-Rigidität)

Beweise die Wittenschen Rigiditätssätze neu im Rahmen einer nichtkommutativen elliptischen Kohomologietheorie.

Auswahl konkreter Probleme

Problem (*K*-Homologie)

Untersuche die Darstellbarkeit der K -Homologie durch summierbare Fredholm-Moduln.

Problem (Bivariante *K*-Theorie)

Beweise den Thom-Isomorphismus im Rahmen lokalkonvexer Algebren.

Problem (Zyklische Homologie)

Berechne die zyklische Homologie für orthogonale und unitäre freie Quantengruppen.

Problem (Witten-Rigidität)

Beweise die Wittenschen Rigiditätssätze neu im Rahmen einer nichtkommutativen elliptischen Kohomologietheorie.

Auswahl konkreter Probleme

Problem (*K*-Homologie)

Untersuche die Darstellbarkeit der K -Homologie durch summierbare Fredholm-Moduln.

Problem (Bivariante *K*-Theorie)

Beweise den Thom-Isomorphismus im Rahmen lokalkonvexer Algebren.

Problem (Zyklische Homologie)

Berechne die zyklische Homologie für orthogonale und unitäre freie Quantengruppen.

Problem (Witten-Rigidität)

Beweise die Wittenschen Rigiditätssätze neu im Rahmen einer nichtkommutativen elliptischen Kohomologietheorie.

Weitere Aspekte

- ▶ Beweis der Indexsätze von Kasparov und Baum-Douglas-Taylor im Rahmen lokalkonvexer Algebren.
- ▶ K -theoretisch triviale Wirkungen von \mathbb{Z}^n .
- ▶ Charakteristische Klassen für Blätterungen und zyklische Homologie.
- ▶ Verallgemeinerte nichtkommutative Tori.
- ▶ Klassifikation nichtkommutativer Torusbündel bis auf RKK -Äquivalenz.



WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

Gruppenalgebren

Projekt C3 · SFB 878 · Groups, Geometry & Actions

S. Echterhoff



Worum geht's?

Studium der Gruppenalgebren $C^*(G)$, $C_r^*(G)$ und $L^1(G)$ einer lokalkompakten Gruppe G sowie durch Kozykel getwistete Varianten.

- ▶ Diese Algebren repräsentieren die "unitäre Darstellungstheorie" von G , z.B. $C^*(G) \sim C_0(\widehat{G})$ im Sinne der nichtkommutativen Geometrie;
- ▶ (getwistete) Gruppenalgebren liefern zentrale Beispiele nichtkommutativer Räume, z.B. nichtkommutative n -Tori $C^*(\mathbb{Z}^n, \omega)$;
- ▶ sie bauen damit eine Brücke zwischen der Harmonischen Analysis und der nichtkommutativen Geometrie/Topologie.

Worum geht's?

Studium der Gruppenalgebren $C^*(G)$, $C_r^*(G)$ und $L^1(G)$ einer lokalkompakten Gruppe G sowie durch Kozykel getwistete Varianten.

- ▶ Diese Algebren repräsentieren die “unitäre Darstellungstheorie” von G , z.B. $C^*(G) \sim C_0(\widehat{G})$ im Sinne der nichtkommutativen Geometrie;
- ▶ (getwistete) Gruppenalgebren liefern zentrale Beispiele nichtkommutativer Räume, z.B. nichtkommutative n -Tori $C^*(\mathbb{Z}^n, \omega)$;
- ▶ sie bauen damit eine Brücke zwischen der Harmonischen Analysis und der nichtkommutativen Geometrie/Topologie.

Worum geht's?

Studium der Gruppenalgebren $C^*(G)$, $C_r^*(G)$ und $L^1(G)$ einer lokalkompakten Gruppe G sowie durch Kozykel getwistete Varianten.

- ▶ Diese Algebren repräsentieren die “unitäre Darstellungstheorie” von G , z.B. $C^*(G) \sim C_0(\widehat{G})$ im Sinne der nichtkommutativen Geometrie;
- ▶ (getwistete) Gruppenalgebren liefern zentrale Beispiele nichtkommutativer Räume, z.B. nichtkommutative n -Tori $C^*(\mathbb{Z}^n, \omega)$;
- ▶ sie bauen damit eine Brücke zwischen der Harmonischen Analysis und der nichtkommutativen Geometrie/Topologie.

Worum geht's?

Studium der Gruppenalgebren $C^*(G)$, $C_r^*(G)$ und $L^1(G)$ einer lokalkompakten Gruppe G sowie durch Kozykel getwistete Varianten.

- ▶ Diese Algebren repräsentieren die “unitäre Darstellungstheorie” von G , z.B. $C^*(G) \sim C_0(\widehat{G})$ im Sinne der nichtkommutativen Geometrie;
- ▶ (getwistete) Gruppenalgebren liefern zentrale Beispiele nichtkommutativer Räume, z.B. nichtkommutative n -Tori $C^*(\mathbb{Z}^n, \omega)$;
- ▶ sie bauen damit eine Brücke zwischen der Harmonischen Analysis und der nichtkommutativen Geometrie/Topologie.

Ausgangspunkt

Zentrale Hilfsmittel sind die bivariate K -Theorie und die Baum-Connes-Vermutung

$$\mu : K_*^G(\underline{EG}) \rightarrow K_*(C_r^*(G)).$$

Auswahl bisheriger Ergebnisse der Arbeitsgruppe:

- ▶ Beweis wichtiger Permanenzeigenschaften der Vermutung;
- ▶ Beweis der Connes-Kasparov-Vermutung (d.h. der Baum-Connes-Vermutung für alle (fast) zusammenhängenden Gruppen);
- ▶ Klassifizierung nichtkommutativer 2-Sphären $A_\theta \rtimes F \cong C^*(\mathbb{Z}^2 \rtimes F, \omega)$ (mit Lück, Phillips, Walthers)

Ausgangspunkt

Zentrale Hilfsmittel sind die bivariate K -Theorie und die Baum-Connes-Vermutung

$$\mu : K_*^G(\underline{EG}) \rightarrow K_*(C_r^*(G)).$$

Auswahl bisheriger Ergebnisse der Arbeitsgruppe:

- ▶ Beweis wichtiger Permanenzeigenschaften der Vermutung;
- ▶ Beweis der Connes-Kasparov-Vermutung (d.h. der Baum-Connes-Vermutung für alle (fast) zusammenhängenden Gruppen);
- ▶ Klassifizierung nichtkommutativer 2-Sphären $A_\theta \rtimes F \cong C^*(\mathbb{Z}^2 \rtimes F, \omega)$ (mit Lück, Phillips, Walthers)

Ausgangspunkt

Zentrale Hilfsmittel sind die bivariate K -Theorie und die Baum-Connes-Vermutung

$$\mu : K_*^G(\underline{EG}) \rightarrow K_*(C_r^*(G)).$$

Auswahl bisheriger Ergebnisse der Arbeitsgruppe:

- ▶ Beweis wichtiger Permanenzeigenschaften der Vermutung;
- ▶ Beweis der Connes-Kasparov-Vermutung (d.h. der Baum-Connes-Vermutung für alle (fast) zusammenhängenden Gruppen);
- ▶ Klassifizierung nichtkommutativer 2-Sphären $A_\theta \rtimes F \cong C^*(\mathbb{Z}^2 \rtimes F, \omega)$ (mit Lück, Phillips, Walthers)

Ausgangspunkt

Zentrale Hilfsmittel sind die bivariate K -Theorie und die Baum-Connes-Vermutung

$$\mu : K_*^G(\underline{EG}) \rightarrow K_*(C_r^*(G)).$$

Auswahl bisheriger Ergebnisse der Arbeitsgruppe:

- ▶ Beweis wichtiger Permanenzeigenschaften der Vermutung;
- ▶ Beweis der Connes-Kasparov-Vermutung (d.h. der Baum-Connes-Vermutung für alle (fast) zusammenhängenden Gruppen);
- ▶ Klassifizierung nichtkommutativer 2-Sphären $A_\theta \rtimes F \cong C^*(\mathbb{Z}^2 \rtimes F, \omega)$ (mit Lück, Phillips, Walthers)

Auswahl zukünftiger Projekte

- ▶ Zusammenhang zwischen K -Theorie von $C_r^*(G)$ und der Darstellungstheorie von G .
- ▶ Austausch der Methoden zur Untersuchung anderer Isomorphismus-Vermutungen (z.B. Farrell-Jones-Vermutung) und der Baum-Connes-Vermutung (zusammen mit Bartels und Lück, B5);
- ▶ Explizite Berechnungen der K -Gruppen für möglichst viele (getwistete) Gruppenalgebren (Zusammenarbeit mit Lück, B6);
- ▶ Studium der Bost-Vermutung (Baum-Connes für $L^1(G)$);
- ▶ Baum-Connes-Vermutung für Quantengruppen.

Auswahl zukünftiger Projekte

- ▶ Zusammenhang zwischen K -Theorie von $C_r^*(G)$ und der Darstellungstheorie von G .
- ▶ Austausch der Methoden zur Untersuchung anderer Isomorphismus-Vermutungen (z.B. Farrell-Jones-Vermutung) und der Baum-Connes-Vermutung (zusammen mit Bartels und Lück, B5);
- ▶ Explizite Berechnungen der K -Gruppen für möglichst viele (getwistete) Gruppenalgebren (Zusammenarbeit mit Lück, B6);
- ▶ Studium der Bost-Vermutung (Baum-Connes für $L^1(G)$);
- ▶ Baum-Connes-Vermutung für Quantengruppen.

Auswahl zukünftiger Projekte

- ▶ Zusammenhang zwischen K -Theorie von $C_r^*(G)$ und der Darstellungstheorie von G .
- ▶ Austausch der Methoden zur Untersuchung anderer Isomorphismus-Vermutungen (z.B. Farrell-Jones-Vermutung) und der Baum-Connes-Vermutung (zusammen mit Bartels und Lück, B5);
- ▶ Explizite Berechnungen der K -Gruppen für möglichst viele (getwistete) Gruppenalgebren (Zusammenarbeit mit Lück, B6);
- ▶ Studium der Bost-Vermutung (Baum-Connes für $L^1(G)$);
- ▶ Baum-Connes-Vermutung für Quantengruppen.

Auswahl zukünftiger Projekte

- ▶ Zusammenhang zwischen K -Theorie von $C_r^*(G)$ und der Darstellungstheorie von G .
- ▶ Austausch der Methoden zur Untersuchung anderer Isomorphismus-Vermutungen (z.B. Farrell-Jones-Vermutung) und der Baum-Connes-Vermutung (zusammen mit Bartels und Lück, B5);
- ▶ Explizite Berechnungen der K -Gruppen für möglichst viele (getwistete) Gruppenalgebren (Zusammenarbeit mit Lück, B6);
- ▶ Studium der Bost-Vermutung (Baum-Connes für $L^1(G)$);
- ▶ Baum-Connes-Vermutung für Quantengruppen.

Auswahl zukünftiger Projekte

- ▶ Zusammenhang zwischen K -Theorie von $C_r^*(G)$ und der Darstellungstheorie von G .
- ▶ Austausch der Methoden zur Untersuchung anderer Isomorphismus-Vermutungen (z.B. Farrell-Jones-Vermutung) und der Baum-Connes-Vermutung (zusammen mit Bartels und Lück, B5);
- ▶ Explizite Berechnungen der K -Gruppen für möglichst viele (getwistete) Gruppenalgebren (Zusammenarbeit mit Lück, B6);
- ▶ Studium der Bost-Vermutung (Baum-Connes für $L^1(G)$);
- ▶ Baum-Connes-Vermutung für Quantengruppen.

Konkrete Problemstellungen

Problem

Beweise eine Version des Atiyah-Schmidt-Satzes für die diskrete Serie einer beliebigen zusammenhängenden Lie-Gruppe.

Problem

Finde einen Beweis der Baum-Connes-Vermutung für $CAT(0)$ -Gruppen durch Übertragung von Methoden von Bartels-Lück im Fall der Farrell-Jones-Vermutung.

Problem

Formuliere und beweise eine Version der Baum-Connes-Vermutung für "freie" Quantengruppen (der Fall orthogonaler freier QG ist schon gelöst).

Problem

Beweise die Baum-Connes-Vermutung für algebraische Gruppen über lokalen Körpern positiver Charakteristik.

Konkrete Problemstellungen

Problem

Beweise eine Version des Atiyah-Schmidt-Satzes für die diskrete Serie einer beliebigen zusammenhängenden Lie-Gruppe.

Problem

Finde einen Beweis der Baum-Connes-Vermutung für $CAT(0)$ -Gruppen durch Übertragung von Methoden von Bartels-Lück im Fall der Farrell-Jones-Vermutung.

Problem

Formuliere und beweise eine Version der Baum-Connes-Vermutung für "freie" Quantengruppen (der Fall orthogonaler freier QG ist schon gelöst).

Problem

Beweise die Baum-Connes-Vermutung für algebraische Gruppen über lokalen Körpern positiver Charakteristik.

Konkrete Problemstellungen

Problem

Beweise eine Version des Atiyah-Schmidt-Satzes für die diskrete Serie einer beliebigen zusammenhängenden Lie-Gruppe.

Problem

Finde einen Beweis der Baum-Connes-Vermutung für $CAT(0)$ -Gruppen durch Übertragung von Methoden von Bartels-Lück im Fall der Farrell-Jones-Vermutung.

Problem

Formuliere und beweise eine Version der Baum-Connes-Vermutung für "freie" Quantengruppen (der Fall orthogonaler freier QG ist schon gelöst).

Problem

Beweise die Baum-Connes-Vermutung für algebraische Gruppen über lokalen Körpern positiver Charakteristik.

Konkrete Problemstellungen

Problem

Beweise eine Version des Atiyah-Schmidt-Satzes für die diskrete Serie einer beliebigen zusammenhängenden Lie-Gruppe.

Problem

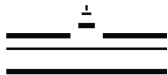
Finde einen Beweis der Baum-Connes-Vermutung für $CAT(0)$ -Gruppen durch Übertragung von Methoden von Bartels-Lück im Fall der Farrell-Jones-Vermutung.

Problem

Formuliere und beweise eine Version der Baum-Connes-Vermutung für "freie" Quantengruppen (der Fall orthogonaler freier QG ist schon gelöst).

Problem

Beweise die Baum-Connes-Vermutung für algebraische Gruppen über lokalen Körpern positiver Charakteristik.



WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

Mathematische Aspekte der Quantenfeldtheorie

Projekt C 4 · SFB 878 · Groups, Geometry & Actions

R. Wolkenhaar



Motivation

- ▶ Quantenfeldtheorie (QFT) für physikalisch realistische Systeme (Yang-Mills-Theorie) ist zu schwierig
- ▶ Vereinfachungen (Skalarfelder, QED) existieren in vier Dimensionen nur störungstheoretisch

Projekt: rigorose Behandlung von

- ▶ QFT auf nichtkommutativen Geometrien
- ▶ Lokalen topologischen Quantenfeldtheorien (mit A. Bartels)

Motivation

- ▶ Quantenfeldtheorie (QFT) für physikalisch realistische Systeme (Yang-Mills-Theorie) ist zu schwierig
- ▶ Vereinfachungen (Skalarfelder, QED) existieren in vier Dimensionen nur störungstheoretisch

Projekt: rigorose Behandlung von

- ▶ QFT auf nichtkommutativen Geometrien
- ▶ Lokalen topologischen Quantenfeldtheorien (mit A. Bartels)

Ziele

- ▶ Studium der **Analytizitätseigenschaften** von Korrelationsfunktionen
- ▶ Untersuchung **nicht-kompakter spektraler Tripel**
- ▶ Verbindungen zu **Index-Theorie** in der nichtkommutativen Geometrie (\rightarrow C2)
- ▶ Konstruktion von **lokalen topologischen Quantenfeldtheorien**
- ▶ Untersuchung von **Chern-Simons-Quantenfeldtheorien**
- ▶ Verbindungen zu **elliptischer Kohomologie**

Ziele

- ▶ Studium der **Analytizitätseigenschaften** von Korrelationsfunktionen
- ▶ Untersuchung **nicht-kompakter spektraler Tripel**
- ▶ Verbindungen zu **Index-Theorie** in der nichtkommutativen Geometrie (\rightarrow C2)

- ▶ Konstruktion von **lokalen topologischen Quantenfeldtheorien**
- ▶ Untersuchung von **Chern-Simons-Quantenfeldtheorien**
- ▶ Verbindungen zu **elliptischer Kohomologie**

Methoden

- ▶ Modelle für **Zufallsmatrizen** (\rightarrow C6)
- ▶ **Schwinger-Dyson-Gleichungen** und **Ward-Identitäten** bezüglich Wirkung der Gruppe der inneren Automorphismen
- ▶ Kombinatorik **iterierter Integrale**
- ▶ **Von-Neumann-Algebren** und **Bimoduln**
- ▶ **Konforme Netze** und ihre Darstellungstheorie
- ▶ Höhere Kategorien

Methoden

- ▶ Modelle für **Zufallsmatrizen** (\rightarrow C6)
- ▶ **Schwinger-Dyson-Gleichungen** und **Ward-Identitäten** bezüglich Wirkung der Gruppe der inneren Automorphismen
- ▶ Kombinatorik **iterierter Integrale**
- ▶ **Von-Neumann-Algebren** und **Bimoduln**
- ▶ **Konforme Netze** und ihre Darstellungstheorie
- ▶ Höhere Kategorien

Theorem (Grosse-Wulkenhaar, 2009)

Die *renormierte planare Zweipunktfunktion* ist Lösung einer *nichtlinearen Integralgleichung*.

- ▶ Lösung sollte *analytisch* in Umgebung der freien Theorie sein
- ▶ Entwicklung nach Polynomen in *iterierten Integralen*
- ▶ *Kombinatorik* von Erzeugung und Kompensation der iterierten Integrale
- ▶ *Abschätzungen* für Konvergenzradius
- ▶ Konstruktion aller Korrelationsfunktionen über *Schwinger-Dyson-Gleichungen* und *Ward-Identitäten*

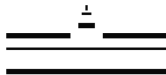
⇒ erste rigoros konstruierte *wechselwirkende* QFT in vier Dimensionen

Theorem (Grosse-Wulkenhaar, 2009)

Die *renormierte planare Zweipunktfunktion* ist Lösung einer *nichtlinearen Integralgleichung*.

- ▶ Lösung sollte *analytisch* in Umgebung der freien Theorie sein
- ▶ Entwicklung nach Polynomen in *iterierten Integralen*
- ▶ *Kombinatorik* von Erzeugung und Kompensation der iterierten Integrale
- ▶ *Abschätzungen* für Konvergenzradius
- ▶ Konstruktion aller Korrelationsfunktionen über *Schwinger-Dyson-Gleichungen* und *Ward-Identitäten*

⇒ erste rigoros konstruierte *wechselwirkende* QFT in vier Dimensionen



WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

Irrfahrten, Verzweigungsprozesse, Zufällige Medien

Projekt C5 · SFB 878 · Groups, Geometry & Actions

G. Alsmeyer, N. Gantert, M. Löwe



Zusammenfassung

- ▶ Beziehungen zwischen einer Irrfahrt und den Eigenschaften ihres Zustandsraumes. Man stelle sich diesen als Graphen (zum Beispiel den Cayley-Graphen einer endlich erzeugten Gruppe) vor.
- ▶ Klassischer Satz: Kestens Kriterium für Amenabilität (Mittelbarkeit). Eine Gruppe ist amenabel genau dann wenn der Spektralradius der zugehörigen Irrfahrt 1 ist, d.h. wenn die Rückkehrwahrscheinlichkeiten langsamer als exponentiell abfallen.
- ▶ Wir interessieren uns besonders für zufällige Störungen regulärer Strukturen. Bleiben die Eigenschaften der Irrfahrt unter solchen Störungen erhalten?
- ▶ Beispiel: Die Irrfahrt auf Z^d ist transient für $d \geq 3$. Ist dies auch der Fall für ein unendliches Perkulationscluster auf Z^d ?
- ▶ Die Antwort ist „ja“ - dies ist eine Aussage über die Geometrie des Perkulationsclusters.

Zusammenfassung

- ▶ Beziehungen zwischen einer Irrfahrt und den Eigenschaften ihres Zustandsraumes. Man stelle sich diesen als Graphen (zum Beispiel den Cayley-Graphen einer endlich erzeugten Gruppe) vor.
- ▶ Klassischer Satz: Kestens Kriterium für Amenabilität (Mittelbarkeit). Eine Gruppe ist amenabel genau dann wenn der Spektralradius der zugehörigen Irrfahrt 1 ist, d.h. wenn die Rückkehrwahrscheinlichkeiten langsamer als exponentiell abfallen.
- ▶ Wir interessieren uns besonders für zufällige Störungen regulärer Strukturen. Bleiben die Eigenschaften der Irrfahrt unter solchen Störungen erhalten?
- ▶ Beispiel: Die Irrfahrt auf Z^d ist transient für $d \geq 3$. Ist dies auch der Fall für ein unendliches Perkulationscluster auf Z^d ?
- ▶ Die Antwort ist „ja“ - dies ist eine Aussage über die Geometrie des Perkulationsclusters.

Zusammenfassung

- ▶ Beziehungen zwischen einer Irrfahrt und den Eigenschaften ihres Zustandsraumes. Man stelle sich diesen als Graphen (zum Beispiel den Cayley-Graphen einer endlich erzeugten Gruppe) vor.
- ▶ Klassischer Satz: Kestens Kriterium für Amenabilität (Mittelbarkeit). Eine Gruppe ist amenabel genau dann wenn der Spektralradius der zugehörigen Irrfahrt 1 ist, d.h. wenn die Rückkehrwahrscheinlichkeiten langsamer als exponentiell abfallen.
- ▶ Wir interessieren uns besonders für zufällige Störungen regulärer Strukturen. Bleiben die Eigenschaften der Irrfahrt unter solchen Störungen erhalten?
- ▶ Beispiel: Die Irrfahrt auf Z^d ist transient für $d \geq 3$. Ist dies auch der Fall für ein unendliches Perkulationscluster auf Z^d ?
- ▶ Die Antwort ist „ja“ - dies ist eine Aussage über die Geometrie des Perkulationsclusters.

Zusammenfassung

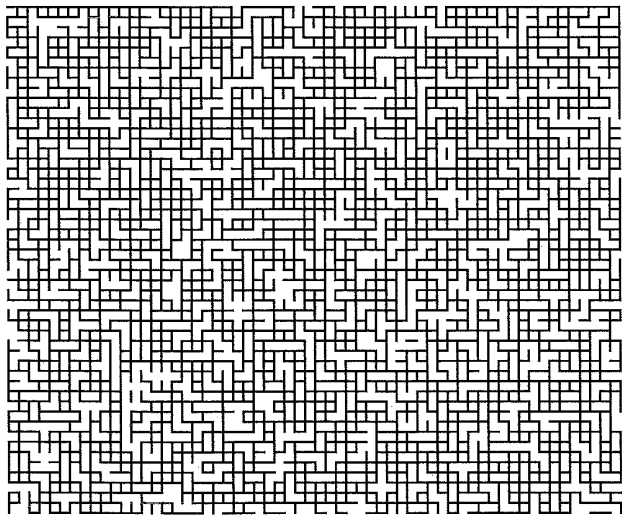
- ▶ Beziehungen zwischen einer Irrfahrt und den Eigenschaften ihres Zustandsraumes. Man stelle sich diesen als Graphen (zum Beispiel den Cayley-Graphen einer endlich erzeugten Gruppe) vor.
- ▶ Klassischer Satz: Kestens Kriterium für Amenabilität (Mittelbarkeit). Eine Gruppe ist amenabel genau dann wenn der Spektralradius der zugehörigen Irrfahrt 1 ist, d.h. wenn die Rückkehrwahrscheinlichkeiten langsamer als exponentiell abfallen.
- ▶ Wir interessieren uns besonders für zufällige Störungen regulärer Strukturen. Bleiben die Eigenschaften der Irrfahrt unter solchen Störungen erhalten?
- ▶ Beispiel: Die Irrfahrt auf Z^d ist transient für $d \geq 3$. Ist dies auch der Fall für ein unendliches Perkulationscluster auf Z^d ?
- ▶ Die Antwort ist „ja“ - dies ist eine Aussage über die Geometrie des Perkulationsclusters.

Zusammenfassung

- ▶ Beziehungen zwischen einer Irrfahrt und den Eigenschaften ihres Zustandsraumes. Man stelle sich diesen als Graphen (zum Beispiel den Cayley-Graphen einer endlich erzeugten Gruppe) vor.
- ▶ Klassischer Satz: Kestens Kriterium für Amenabilität (Mittelbarkeit). Eine Gruppe ist amenabel genau dann wenn der Spektralradius der zugehörigen Irrfahrt 1 ist, d.h. wenn die Rückkehrwahrscheinlichkeiten langsamer als exponentiell abfallen.
- ▶ Wir interessieren uns besonders für zufällige Störungen regulärer Strukturen. Bleiben die Eigenschaften der Irrfahrt unter solchen Störungen erhalten?
- ▶ Beispiel: Die Irrfahrt auf Z^d ist transient für $d \geq 3$. Ist dies auch der Fall für ein unendliches Perkulationscluster auf Z^d ?
- ▶ Die Antwort ist „ja“ - dies ist eine Aussage über die Geometrie des Perkulationsclusters.

Zusammenfassung

- ▶ Beziehungen zwischen einer Irrfahrt und den Eigenschaften ihres Zustandsraumes. Man stelle sich diesen als Graphen (zum Beispiel den Cayley-Graphen einer endlich erzeugten Gruppe) vor.
- ▶ Klassischer Satz: Kestens Kriterium für Amenabilität (Mittelbarkeit). Eine Gruppe ist amenabel genau dann wenn der Spektralradius der zugehörigen Irrfahrt 1 ist, d.h. wenn die Rückkehrwahrscheinlichkeiten langsamer als exponentiell abfallen.
- ▶ Wir interessieren uns besonders für zufällige Störungen regulärer Strukturen. Bleiben die Eigenschaften der Irrfahrt unter solchen Störungen erhalten?
- ▶ Beispiel: Die Irrfahrt auf Z^d ist transient für $d \geq 3$. Ist dies auch der Fall für ein unendliches Perkulationscluster auf Z^d ?
- ▶ Die Antwort ist „ja“ - dies ist eine Aussage über die Geometrie des Perkulationsclusters.



(d) $p = 0.75$

Beispiele

- ▶ Klassischer Satz: Positivität der Cheeger-Konstanten impliziert positive lineare Geschwindigkeit der Irrfahrt.
- ▶ Beispiel: Reguläre Bäume.
- ▶ Frage: Gilt dies auch für die Irrfahrt mit zufälligen (strikt positiven) Kantengewichten?
- ▶ Antwort: Ja – falls die Kantengewichte unabhängig und identisch verteilt sind und endlichen Erwartungswert haben.

Beispiele

- ▶ Klassischer Satz: Positivität der Cheeger-Konstanten impliziert positive lineare Geschwindigkeit der Irrfahrt.
- ▶ Beispiel: Reguläre Bäume.
- ▶ Frage: Gilt dies auch für die Irrfahrt mit zufälligen (strikt positiven) Kantengewichten?
- ▶ Antwort: Ja – falls die Kantengewichte unabhängig und identisch verteilt sind und endlichen Erwartungswert haben.

Beispiele

- ▶ Klassischer Satz: Positivität der Cheeger-Konstanten impliziert positive lineare Geschwindigkeit der Irrfahrt.
- ▶ Beispiel: Reguläre Bäume.
- ▶ Frage: Gilt dies auch für die Irrfahrt mit zufälligen (strikt positiven) Kantengewichten?
- ▶ Antwort: Ja – falls die Kantengewichte unabhängig und identisch verteilt sind und endlichen Erwartungswert haben.

Beispiele

- ▶ Klassischer Satz: Positivität der Cheeger-Konstanten impliziert positive lineare Geschwindigkeit der Irrfahrt.
- ▶ Beispiel: Reguläre Bäume.
- ▶ Frage: Gilt dies auch für die Irrfahrt mit zufälligen (strikt positiven) Kantengewichten?
- ▶ Antwort: Ja – falls die Kantengewichte unabhängig und identisch verteilt sind und endlichen Erwartungswert haben.

Beispiele

- ▶ Klassischer Satz: Positivität der Cheeger-Konstanten impliziert positive lineare Geschwindigkeit der Irrfahrt.
- ▶ Beispiel: Reguläre Bäume.
- ▶ Frage: Gilt dies auch für die Irrfahrt mit zufälligen (strikt positiven) Kantengewichten?
- ▶ Antwort: Ja – falls die Kantengewichte unabhängig und identisch verteilt sind und endlichen Erwartungswert haben.

Noch mehr Beispiele

- ▶ Zufällige Umgebung: die Übergangswahrscheinlichkeiten sind selbst Realisierungen eines Zufallsfeldes
- ▶ Beispiel: random conductance model
- ▶ Beispiel: unabhängig und identisch verteilte Übergangswahrscheinlichkeiten von allen Ecken des Graphs aus.
- ▶ Verzweigende Irrfahrt:
Statt der Irrfahrt **eines** Teilchens, nehme eine Reproduktionsverteilung dazu (z.B. binäre Verzweigung: Teilchen verdoppeln sich) und betrachte die zufällige Wolke **vieler** Teilchen, die sich auf dem Graph bewegen.
- ▶ Irrfahrten auf Konfigurationsräumen –
– diese sind endlich, aber man ist am Limes für wachsende Größe interessiert.

Noch mehr Beispiele

- ▶ Zufällige Umgebung: die Übergangswahrscheinlichkeiten sind selbst Realisierungen eines Zufallsfeldes
- ▶ Beispiel: random conductance model
- ▶ Beispiel: unabhängig und identisch verteilte Übergangswahrscheinlichkeiten von allen Ecken des Graphs aus.
- ▶ Verzweigende Irrfahrt:
Statt der Irrfahrt **eines** Teilchens, nehme eine Reproduktionsverteilung dazu (z.B. binäre Verzweigung: Teilchen verdoppeln sich) und betrachte die zufällige Wolke **vieler** Teilchen, die sich auf dem Graph bewegen.
- ▶ Irrfahrten auf Konfigurationsräumen –
– diese sind endlich, aber man ist am Limes für wachsende Größe interessiert.

Noch mehr Beispiele

- ▶ Zufällige Umgebung: die Übergangswahrscheinlichkeiten sind selbst Realisierungen eines Zufallsfeldes
- ▶ Beispiel: random conductance model
- ▶ Beispiel: unabhängig und identisch verteilte Übergangswahrscheinlichkeiten von allen Ecken des Graphs aus.
- ▶ Verzweigende Irrfahrt:
Statt der Irrfahrt **eines** Teilchens, nehme eine Reproduktionsverteilung dazu (z.B. binäre Verzweigung: Teilchen verdoppeln sich) und betrachte die zufällige Wolke **vieler** Teilchen, die sich auf dem Graph bewegen.
- ▶ Irrfahrten auf Konfigurationsräumen –
– diese sind endlich, aber man ist am Limes für wachsende Größe interessiert.

Noch mehr Beispiele

- ▶ Zufällige Umgebung: die Übergangswahrscheinlichkeiten sind selbst Realisierungen eines Zufallsfeldes
- ▶ Beispiel: random conductance model
- ▶ Beispiel: unabhängig und identisch verteilte Übergangswahrscheinlichkeiten von allen Ecken des Graphs aus.
- ▶ Verzweigende Irrfahrt:
Statt der Irrfahrt **eines** Teilchens, nehme eine Reproduktionsverteilung dazu (z.B. binäre Verzweigung: Teilchen verdoppeln sich) und betrachte die zufällige Wolke **vieler** Teilchen, die sich auf dem Graph bewegen.
- ▶ Irrfahrten auf Konfigurationsräumen –
– diese sind endlich, aber man ist am Limes für wachsende Größe interessiert.

Auswahl von Problemen

Problem (**Geschwindigkeit einer Irrfahrt in zufälliger Umgebung**)

Finde Kriterien für Positivität der Geschwindigkeit.

Berechne ihr Verhalten unter einem (kleinen) äusseren Feld:

Einstein-Relation.

Problem (**Ausbreitung einer verzweigenden Irrfahrt**)

Untersuche die Asymptotik des minimalen/maximalen Abstandes der Teilchenwolke vom Ursprung.

Problem (**Mischungszeit von Irrfahrten auf Konfigurationsräumen**)

Beziehung zu stochastischen Algorithmen.

Auswahl von Problemen

Problem (Geschwindigkeit einer Irrfahrt in zufälliger Umgebung)

Finde Kriterien für Positivität der Geschwindigkeit.

Berechne ihr Verhalten unter einem (kleinen) äusseren Feld:

Einstein-Relation.

Problem (Ausbreitung einer verzweigenden Irrfahrt)

Untersuche die Asymptotik des minimalen/maximalen Abstandes der Teilchenwolke vom Ursprung.

Problem (Mischungszeit von Irrfahrten auf Konfigurationsräumen)

Beziehung zu stochastischen Algorithmen.

Auswahl von Problemen

Problem (Geschwindigkeit einer Irrfahrt in zufälliger Umgebung)

Finde Kriterien für Positivität der Geschwindigkeit.

Berechne ihr Verhalten unter einem (kleinen) äusseren Feld:

Einstein-Relation.

Problem (Ausbreitung einer verzweigenden Irrfahrt)

Untersuche die Asymptotik des minimalen/maximalen Abstandes der Teilchenwolke vom Ursprung.

Problem (Mischungszeit von Irrfahrten auf Konfigurationsräumen)

Beziehung zu stochastischen Algorithmen.

Auswahl von Problemen

Problem (Geschwindigkeit einer Irrfahrt in zufälliger Umgebung)

Finde Kriterien für Positivität der Geschwindigkeit.

*Berechne ihr Verhalten unter einem (kleinen) äusseren Feld:
Einstein-Relation.*

Problem (Ausbreitung einer verzweigenden Irrfahrt)

*Untersuche die Asymptotik des minimalen/maximalen Abstandes der
Teilchenwolke vom Ursprung.*

Problem (Mischungszeit von Irrfahrten auf Konfigurationsräumen)

Beziehung zu stochastischen Algorithmen.



WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

Zufallsmatrizen & Iterierte Funktionensysteme

Projekt C6 · SFB 878 · Groups, Geometry & Actions

G. Alsmeyer, C. Deninger, M. Löwe



Fragestellungen

- ▶ Die klassischen Grenzwertsätze für die Spektren zufälliger Matrizen sollen auf Zufallsmatrixensembles erweitert werden, die auf „natürliche Weise“ stochastisch abhängige Einträge aufweisen.
- ▶ Iterierte Funktionensysteme, also Hintereinanderschaltungen zufälliger Selbstabbildungen eines vollständigen metrischen Raums in sich, sollen auf Konvergenz überprüft werden. Der lineare Fall, also Produkte zufälliger Matrizen wurde in einer Arbeit von Kesten behandelt.

Fragestellungen

- ▶ Die klassischen Grenzwertsätze für die Spektren zufälliger Matrizen sollen auf Zufallsmatrixensembles erweitert werden, die auf „natürliche Weise“ stochastisch abhängige Einträge aufweisen.
- ▶ Iterierte Funktionensysteme, also Hintereinanderschaltungen zufälliger Selbstabbildungen eines vollständigen metrischen Raums in sich, sollen auf Konvergenz überprüft werden. Der lineare Fall, also Produkte zufälliger Matrizen wurde in einer Arbeit von Kesten behandelt.

Fragestellungen

- ▶ Die klassischen Grenzwertsätze für die Spektren zufälliger Matrizen sollen auf Zufallsmatrixensembles erweitert werden, die auf „natürliche Weise“ stochastisch abhängige Einträge aufweisen.
- ▶ Iterierte Funktionensysteme, also Hintereinanderschaltungen zufälliger Selbstabbildungen eines vollständigen metrischen Raums in sich, sollen auf Konvergenz überprüft werden. Der lineare Fall, also Produkte zufälliger Matrizen wurde in einer Arbeit von Kesten behandelt.

Mögliche Zufallsmatrixensembles

- ▶ „Klassischer Fall“: Zentrierte i.i.d. Gauß-Variablen
- ▶ „Klassische Verallgemeinerungen“:
 1. I.i.d. Variablen
 2. Zufällige Hermitesche Matrizen
- ▶ Markovsche Zufallsfelder
- ▶ m-abhängige Zufallsfelder
- ▶ Stationäre Zufallsfelder mit geeigneten Mischungsbedingungen

Mögliche Zufallsmatrixensembles

- ▶ „Klassischer Fall“: Zentrierte i.i.d. Gauß-Variablen
- ▶ „Klassische Verallgemeinerungen“:
 1. I.i.d. Variablen
 2. Zufällige Hermitesche Matrizen
- ▶ Markovsche Zufallsfelder
- ▶ m-abhängige Zufallsfelder
- ▶ Stationäre Zufallsfelder mit geeigneten Mischungsbedingungen

Mögliche Zufallsmatrixensembles

- ▶ „Klassischer Fall“: Zentrierte i.i.d. Gauß-Variablen
- ▶ „Klassische Verallgemeinerungen“:
 1. I.i.d. Variablen
 2. Zufällige Hermitesche Matrizen
- ▶ Markovsche Zufallsfelder
- ▶ m-abhängige Zufallsfelder
- ▶ Stationäre Zufallsfelder mit geeigneten Mischungsbedingungen

Mögliche Zufallsmatrixensembles

- ▶ „Klassischer Fall“: Zentrierte i.i.d. Gauß-Variablen
- ▶ „Klassische Verallgemeinerungen“:
 1. I.i.d. Variablen
 2. Zufällige Hermitesche Matrizen
- ▶ Markovsche Zufallsfelder
- ▶ m -abhängige Zufallsfelder
- ▶ Stationäre Zufallsfelder mit geeigneten Mischungsbedingungen

Mögliche Zufallsmatrixensembles

- ▶ „Klassischer Fall“: Zentrierte i.i.d. Gauß-Variablen
- ▶ „Klassische Verallgemeinerungen“:
 1. I.i.d. Variablen
 2. Zufällige Hermitesche Matrizen
- ▶ Markovsche Zufallfelder
- ▶ m-abhängige Zufallfelder
- ▶ Stationäre Zufallfelder mit geeigneten Mischungsbedingungen

Mögliche Zufallsmatrixensembles

- ▶ „Klassischer Fall“: Zentrierte i.i.d. Gauß-Variablen
- ▶ „Klassische Verallgemeinerungen“:
 1. I.i.d. Variablen
 2. Zufällige Hermitesche Matrizen
- ▶ Markovsche Zufallfelder
- ▶ m-abhängige Zufallfelder
- ▶ Stationäre Zufallfelder mit geeigneten Mischungsbedingungen

Mögliche Zufallsmatrixensembles

- ▶ „Klassischer Fall“: Zentrierte i.i.d. Gauß-Variablen
- ▶ „Klassische Verallgemeinerungen“:
 1. I.i.d. Variablen
 2. Zufällige Hermitesche Matrizen
- ▶ Markovsche Zufallfelder
- ▶ m -abhängige Zufallfelder
- ▶ Stationäre Zufallfelder mit geeigneten Mischungsbedingungen

Zu betrachtende Grenzwertsätze

- ▶ **Wignersches Halbkreisgesetz und Girkosches Kreisgesetz:**
Grenzwertsatz für die empirische Verteilungsfunktion der Eigenwerte einer Zufallsmatrix
- ▶ **Verallgemeinerung des Wignerschen Halbkreisgesetzes:**
Welche Mischungsbedingungen müssen die Einträge erfüllen, damit eine Familie unabhängiger Zufallsmatrizen gegen eine freie Familie konvergiert? (Verbindungen: C1, B7)
- ▶ **Spacings:**
Welcher asymptotischen Verteilung genügen die Spacings der Eigenwerte solcher Matrizen?
- ▶ **Größter Eigenwert:**
Welcher asymptotischen Verteilung genügt der größte Eigenwert solcher Matrizen? (Verbindung: C4)

Zu betrachtende Grenzwertsätze

- ▶ **Wignersches Halbkreisgesetz und Girkosches Kreisgesetz:**
Grenzwertsatz für die empirische Verteilungsfunktion der Eigenwerte einer Zufallsmatrix
- ▶ **Verallgemeinerung des Wignerschen Halbkreisgesetzes:**
Welche Mischungsbedingungen müssen die Einträge erfüllen, damit eine Familie unabhängiger Zufallsmatrizen gegen eine freie Familie konvergiert? (Verbindungen: C1, B7)
- ▶ **Spacings:**
Welcher asymptotischen Verteilung genügen die Spacings der Eigenwerte solcher Matrizen?
- ▶ **Größter Eigenwert:**
Welcher asymptotischen Verteilung genügt der größte Eigenwert solcher Matrizen? (Verbindung: C4)

Zu betrachtende Grenzwertsätze

- ▶ **Wignersches Halbkreisgesetz und Girkosches Kreisgesetz:**
Grenzwertsatz für die empirische Verteilungsfunktion der Eigenwerte einer Zufallsmatrix
- ▶ **Verallgemeinerung des Wignerschen Halbkreisgesetzes:**
Welche Mischungsbedingungen müssen die Einträge erfüllen, damit eine Familie unabhängiger Zufallsmatrizen gegen eine freie Familie konvergiert? (Verbindungen: C1, B7)
- ▶ **Spacings:**
Welcher asymptotischen Verteilung genügen die Spacings der Eigenwerte solcher Matrizen?
- ▶ **Größter Eigenwert:**
Welcher asymptotischen Verteilung genügt der größte Eigenwert solcher Matrizen? (Verbindung: C4)

Zu betrachtende Grenzwertsätze

- ▶ **Wignersches Halbkreisgesetz und Girkosches Kreisgesetz:**
Grenzwertsatz für die empirische Verteilungsfunktion der Eigenwerte einer Zufallsmatrix
- ▶ **Verallgemeinerung des Wignerschen Halbkreisgesetzes:**
Welche Mischungsbedingungen müssen die Einträge erfüllen, damit eine Familie unabhängiger Zufallsmatrizen gegen eine freie Familie konvergiert? (Verbindungen: C1, B7)
- ▶ **Spacings:**
Welcher asymptotischen Verteilung genügen die Spacings der Eigenwerte solcher Matrizen?
- ▶ **Größter Eigenwert:**
Welcher asymptotischen Verteilung genügt der größte Eigenwert solcher Matrizen? (Verbindung: C4)

Zu betrachtende Grenzwertsätze

- ▶ **Wignersches Halbkreisgesetz und Girkosches Kreisgesetz:**
Grenzwertsatz für die empirische Verteilungsfunktion der Eigenwerte einer Zufallsmatrix
- ▶ **Verallgemeinerung des Wignerschen Halbkreisgesetzes:**
Welche Mischungsbedingungen müssen die Einträge erfüllen, damit eine Familie unabhängiger Zufallsmatrizen gegen eine freie Familie konvergiert? (Verbindungen: C1, B7)
- ▶ **Spacings:**
Welcher asymptotischen Verteilung genügen die Spacings der Eigenwerte solcher Matrizen?
- ▶ **Größter Eigenwert:**
Welcher asymptotischen Verteilung genügt der größte Eigenwert solcher Matrizen? (Verbindung: C4)

Fragestellungen für iterierte Funktionensysteme

- ▶ Asymptotische Stabilität von Iterationen zufälliger C^1 -Funktionen unter geeigneten (lokalen) Kontraktionsbedingungen
- ▶ Forschungsschwerpunkt: Tail-Verhalten der stationären Verteilung (Potenzgesetz)
- ▶ Technische Hilfsmittel:
 - ▶ gestörte Markov-Erneuerungstheorie (Zerlegung des Systems in einen Markov Random Walk und einen „sublinearen“ Anteil)
 - ▶ Implizite Erneuerungstheorie in höherer Dimension (stochastische Fixpunktgleichung der stationären Verteilung als Ausgangspunkt)

Fragestellungen für iterierte Funktionensysteme

- ▶ Asymptotische Stabilität von Iterationen zufälliger C^1 -Funktionen unter geeigneten (lokalen) Kontraktionsbedingungen
- ▶ Forschungsschwerpunkt: Tail-Verhalten der stationären Verteilung (Potenzgesetz)
- ▶ Technische Hilfsmittel:
 - ▶ gestörte Markov-Erneuerungstheorie (Zerlegung des Systems in einen Markov Random Walk und einen „sublinearen“ Anteil)
 - ▶ Implizite Erneuerungstheorie in höherer Dimension (stochastische Fixpunktgleichung der stationären Verteilung als Ausgangspunkt)

Fragestellungen für iterierte Funktionensysteme

- ▶ Asymptotische Stabilität von Iterationen zufälliger C^1 -Funktionen unter geeigneten (lokalen) Kontraktionsbedingungen
- ▶ Forschungsschwerpunkt: Tail-Verhalten der stationären Verteilung (Potenzgesetz)
- ▶ Technische Hilfsmittel:
 - ▶ gestörte Markov-Erneuerungstheorie (Zerlegung des Systems in einen Markov Random Walk und einen „sublinearen“ Anteil)
 - ▶ Implizite Erneuerungstheorie in höherer Dimension (stochastische Fixpunktgleichung der stationären Verteilung als Ausgangspunkt)

Fragestellungen für iterierte Funktionensysteme

- ▶ Asymptotische Stabilität von Iterationen zufälliger C^1 -Funktionen unter geeigneten (lokalen) Kontraktionsbedingungen
- ▶ Forschungsschwerpunkt: Tail-Verhalten der stationären Verteilung (Potenzgesetz)
- ▶ Technische Hilfsmittel:
 - ▶ gestörte Markov-Erneuerungstheorie (Zerlegung des Systems in einen Markov Random Walk und einen „sublinearen“ Anteil)
 - ▶ Implizite Erneuerungstheorie in höherer Dimension (stochastische Fixpunktgleichung der stationären Verteilung als Ausgangspunkt)

Fragestellungen für iterierte Funktionensysteme

- ▶ Asymptotische Stabilität von Iterationen zufälliger C^1 -Funktionen unter geeigneten (lokalen) Kontraktionsbedingungen
- ▶ Forschungsschwerpunkt: Tail-Verhalten der stationären Verteilung (Potenzgesetz)
- ▶ Technische Hilfsmittel:
 - ▶ gestörte Markov-Erneuerungstheorie (Zerlegung des Systems in einen Markov Random Walk und einen „sublinearen“ Anteil)
 - ▶ Implizite Erneuerungstheorie in höherer Dimension (stochastische Fixpunktgleichung der stationären Verteilung als Ausgangspunkt)