Das Chamäleon Mathematik

Wolfgang Lück

September 2009

Sprache Mathematik

- UISTZWEIPIR
-
$$U = 2\pi r$$
-
$$U = 2 \cdot \pi \cdot r$$

- Die Formel besagt:
  Der Umfang eines Kreises ist proportional zu seinem Radius, wobei der Proportionalitätsfaktor das Doppelte der Zahl π ist, die ihrerseits gleich dem Flächeninhalt eines Kreises vom Radius 1 ist.

- Die Zahl π hat keine Darstellung als periodische Dezimalzahl.

$$\pi = 3.14159265358979323846264\ldots$$

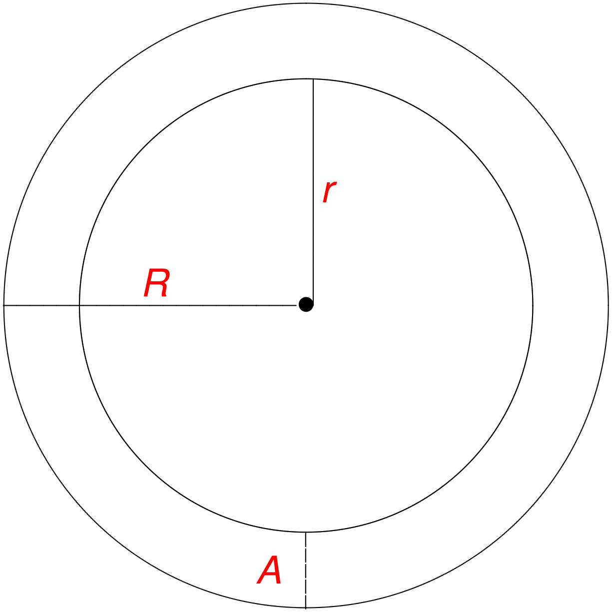
- Mathematatik ist unter anderem eine extrem komplizierte und reichhaltige Sprache.
- Das macht sie einerseits schwer verständlich.
- Andererseits ist das eines ihrer Erfolgsgeheimnisse.

Ein Gedankenexperiment

- Stellen Sie sich die Erde als vollkommene Kugel vor.
- Um den Äquator legen wir ein Metallband.
- Die Länge ist etwa 40.000.000 m.
- Wir öffnen das Band und verlängern es um 1m auf 40.000.001 m.
- Danach lassen wir es gleichmäßig vom Äquator abstehen.

- Frage:

  Kann eine Maus unter dem Band herkriechen?


r
R
A

- Sei u bzw. U der Umfang des Bandes vor bzw. nach dem Verlängern. Es gilt

$$U - u = 1m.$$

- Sei r bzw. R der Radius des Kreises, den das Band vor bzw. nach dem Verlängern beschreibt.

- Sei A der Abstand, den das Band nach dem Verlängern von der Erdoberfläche hat. Es gilt

$$A = R - r.$$

- Es gilt

$$\begin{aligned} U &= 2 \cdot \pi \cdot R, \\ u &= 2 \cdot \pi \cdot r. \end{aligned}$$

- Subtrahiert man diese Gleichungen voneinander, erhält man

$$\begin{aligned} 1m &= U - u \\ &= 2 \cdot \pi \cdot R - 2 \cdot \pi \cdot r \\ &= 2 \cdot \pi \cdot (R - r) \\ &= 2 \cdot \pi \cdot A. \end{aligned}$$

- Dividiert man durch $2 \cdot \pi$, so erhält man
$$A = \frac{1m}{2 \cdot \pi} \geq 15cm.$$

- Der Abstand A hängt gar nicht von dem Radius der Kugel ab, mit der wir gestartet sind.

- Die Antwort auf die Frage ist also "Ja".

Fehlerkorrektur

- Mathematik kann benutzt werden, um effektiv Übertragungsfehler zu korrigieren.
- Wir erläutern dies am sogenannten Hamming Code.
- Aufgabe: Übertrage eine Folge von vier Zeichen, wobei jedes der Zeichen entweder 0 oder 1 ist.
- Zum Beispiel $0, 1, 1, 0$ oder $0, 0, 1, 1$.

- Eine Idee ist, die Übertragung einmal zu wiederholen.
- Gehen wir davon aus, dass insgesamt nur höchstens ein Fehler auftritt.
- Dann weiß der Empfänger, dass bei der Übertragung kein Fehler aufgetreten ist, oder an welcher Stelle der Fehler war.
- Er kann ihn aber nicht korrigieren.

- Empfangen: 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1
- Gesendet: 1, 0, 0, 1
- Empfangen: 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1
- Gesendet: 1, 0, ?, 1
- Empfangen: 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1
- Gesendet: ?, 0, 0, 1

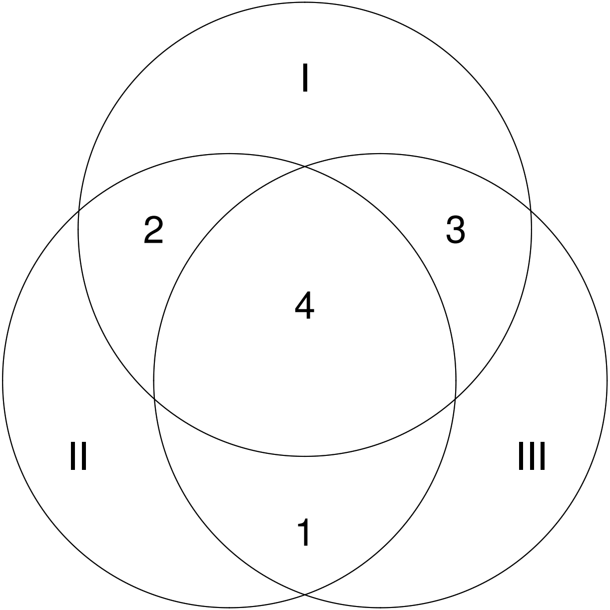
- Eine weitere Idee ist, die Übertragung zweimal zu wiederholen.
- Gehen wir wieder davon aus, dass insgesamt nur höchstens ein Fehler auftritt.
- Dann kann der Übertragungsfehler sogar korrigiert werden.

- Empfangen:
  1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1
- Gesendet: 1, 0, 0, 1
- Empfangen:
  1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1
- Gesendet: 1, 0, 0, 1,
  Fehler an 7. Stelle

- Empfangen:
  $1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1$

- Gesendet: $1, 0, 0, 1$
  Fehler an 5. Stelle

- Diese Methode ist sehr ineffektiv.
- Für die Übertragung von vier Bits werden acht Korrektur-Bits angehängt.
- Der Hamming Code schafft dasselbe Ergebnis, aber mit nur drei Korrektur-Bits.


I
2
3
4
II
III
1

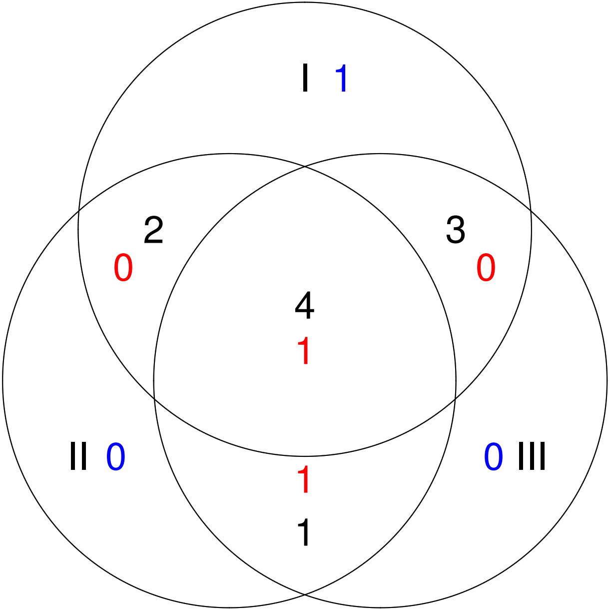
- Trage die vier zu übertragenden Bits an die Stellen 1, 2, 3 und 4 in der obigen Konfiguration ein.
- Dann bestimme die Korrektur-Bits nach folgender Kreisregel:
- Die Summe der Bits in jedem der einzelnen Kreise soll eine gerade Zahl sein.

- Übertrage das Wort bestehend aus sieben Bits, nämlich den vier gegebenen Bits und den drei Korrektur-Bits.
- Wir gehen wieder davon aus, dass nur höchstens ein Fehler passiert ist.

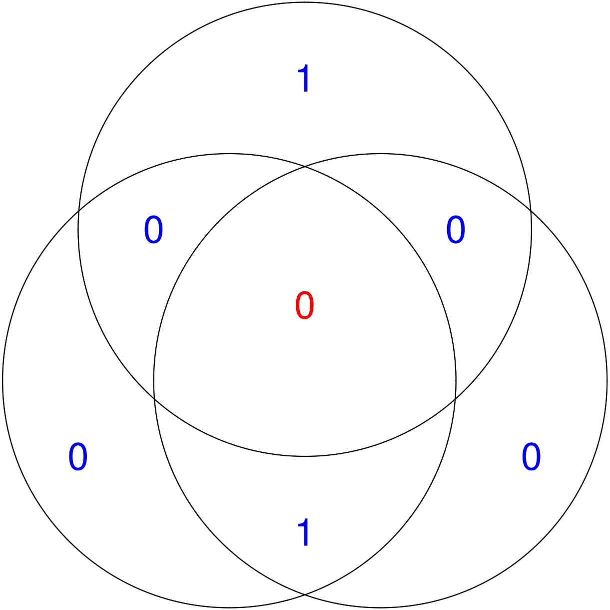
- Falls bei dem Empfänger die Kreisregel immer noch erfüllt ist, weiß er, dass kein Fehler aufgetreten ist.
- Falls bei dem Empfänger die Kreisregel nicht mehr für alle Kreise erfüllt ist, kann er das falsch übertragende Bit folgendermaßen bestimmen.

- Das falsch übertragende Bit ist das Bit, das in allen Kreisen liegt, für die die Kreisregel verletzt ist, aber in keinem Kreis, für die die Kreisregel erfüllt ist.

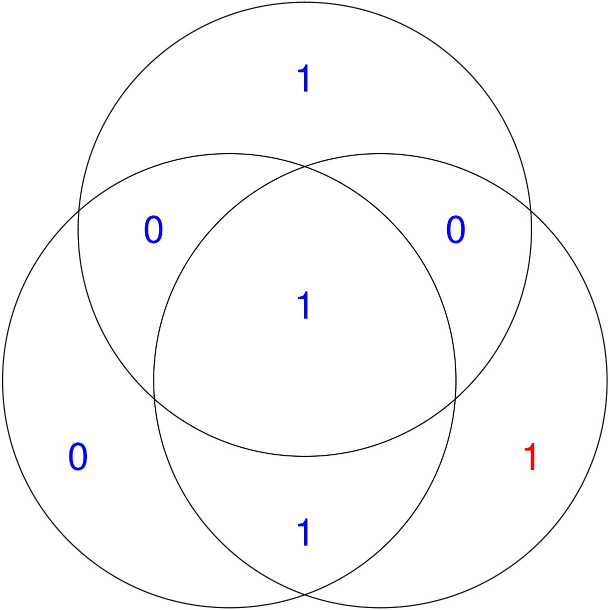
- Beispiel
- Wir wollen $1, 0, 0, 1$ übertragen.
- Die Korrektur-Bits lauten: $1, 0, 0$
- Also wird $1, 0, 0, 1, 1, 0, 0$ gesendet.


I 1
2
0
3
0
4
1
II 0
0 III
1
1

- Wir gehen wieder davon aus, dass nur höchstens ein Fehler passiert ist.
- Empfangen: $1, 0, 0, 1, 1, 0, 0$
- Kein Fehler
- Empfangen: $1, 0, 0, 0, 1, 0, 0$
- Fehler an 4. Stelle


1
0
0
0
0
0
1

- Empfangen: $1, 0, 0, 1, 1, 0, 1$
- Fehler an 7. Stelle


1
0
0
1
0
1
1

- Die Korrektur von Fehlern bei der Datenübertagung spielt eine zentrale Rolle beispielsweise in der Kommunikation zwischen Satelliten oder bei dem Abspielen einer CD.
- Mathematik macht es überhaupt erst möglich, dass diese Dinge funktionieren.

Kann man Mathematik missbrauchen?

- Die Mathematik selbst ist unschuldig.
- Die Menschen, die sie entwickeln oder benutzen, aber nicht.
- Man denke an konkrete Anwendungen oder Sponsoren.

- Aber auch theoretische Mathematiker, die an den Grundlagen arbeiten, können sich der Verantwortung nicht entziehen.
- Das Potential von Mathematik, die zunächst als reine Grundlagenforschung ohne Anwendungsbezug entwickelt worden ist, ist nicht vorhersehbar.

Ein paar Statistiken zum Mitdenken

- Die folgenden Statistiken sind korrekt.
- Frage: Was ist Ihr spontaner Gedanke?

- Lebenspartner
- Geschiedene Leute haben eine höhere Lebenserwartung.

- Karriere
- Leute in Führungspositionen haben größere Füße.

- Religion
- Mehr als siebzig Prozent aller Verbrecher in Bayern sind katholisch.

Topologen, Donuts und Kaffeetassen

- Häufig zitierte Phrase:
- Ein Topologe ist jemand, der einen Donut nicht von einer Kaffeetasse unterscheiden kann.

- Schon besser:
- Ein Topologe ist jemand, der einen Donut von einer Kaffeetasse unterscheiden kann,
  aber nicht unbedingt will.

- Noch besser:
- Topologen hatten die geniale Einsicht, dass in einem gewissen Sinn das geometrische Gebilde, das ein Donut beschreibt, dasselbe ist wie das geometrische Gebilde, das eine Kaffeetasse beschreibt.

Homöomorphie

- Seien M und N zwei geometrische Gebilde.
- Sie heißen homöomorph, wenn es stetige Abbildungen $f\colon M \longrightarrow N$ und $g\colon N \longrightarrow M$ gibt derart, dass $g \circ f = \mathrm{id}_M$ und $f \circ g = \mathrm{id}_N$ gelten.

- Anschaulich bedeutet dies, dass man durch Ziehen und Zerren ein Gebilde in das andere überführen kann, ohne dass man zwischenzeitlich etwas aufschneidet oder zerreißt und wieder zusammenfügt.

- Man kann sich das auch als einen stetigen Abtastungsprozess vorstellen, der in beiden Richtungen funktioniert.

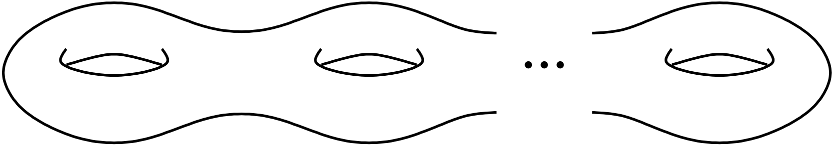
- Eine Kugel vom Radius 1m und eine Kugel vom Radius 1 km sind homöomorph.
- Eine Kugel und ein Würfel sind homöomorph.
- Eine Kaffeetasse und ein Donut sind homöomorph.
- Eine Kugel und ein Donut sind nicht homöomorph.

Flächen

- Eine Fläche ist ein geometrisches geschlossenes Teilgebilde im drei-dimensionalen Raum, das lokal homöomorph zum zwei-dimensionalen Raum ist.
- Jede Fläche ist zu genau einer Standardfläche vom Geschlecht g homöomorph.

- Fläche vom Geschlecht g.

  (Das Geschlecht ist die Anzahl der Löcher).



- Die folgenden Bilder zeigen Objekte, deren Oberfläche eine Fläche beschreibt.
- Frage: Was ist ihr Geschlecht?

Euler-Charakteristik

- Man kann jede Fläche mit Vielecken so überdecken, dass zwei Vielecke sich gar nicht berühren oder ihr Durchschnitt genau aus einer Kante besteht.


© 2001 Winston Mitchell

- Die Euler-Charakteristik χ so einer Überdeckung ist definiert als

$$\chi = E - K + F.$$

- Dabei sind E, K und F die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen.

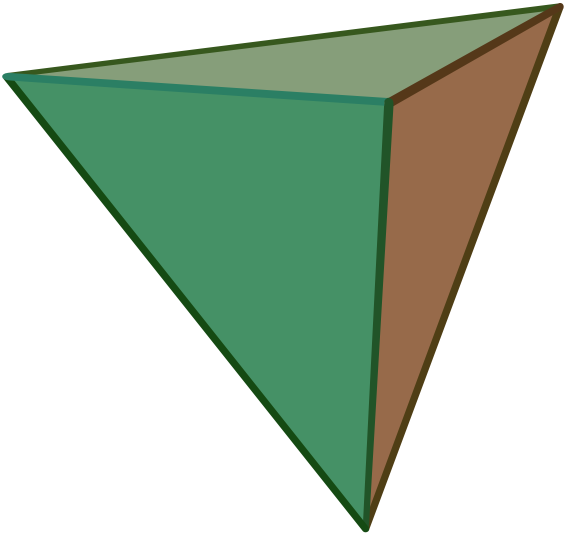
- Die Euler-Charakteristik hängt nicht von der Wahl der Überdeckung ab.
- Zwei Flächen sind genau dann homöomorph, wenn sie dieselbe Euler-Charakteristik haben.
- $$\chi(F_g) = 2 - 2g$$

- Die Euler-Charakteristik der Kugeloberfläche F_0 ist 2.
- Die Euler-Charakteristik der Oberfläche eines Donuts F_1 ist 0.
- Die Euler-Charakteristik der Oberfläche einer Kaffeetasse ist auch 0.

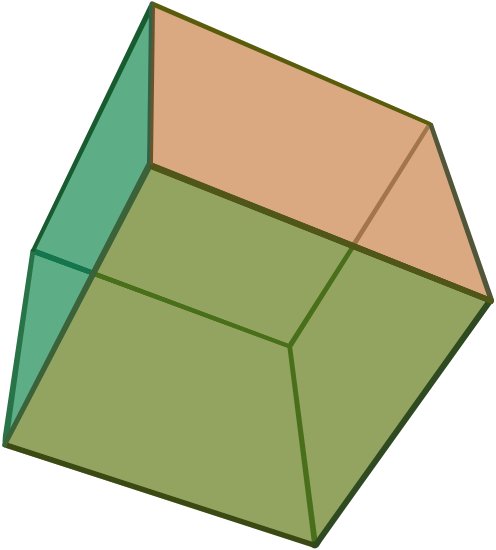
Platonische Körper

- Ein Platonischer Körper ist ein konvexer Körper im Raum, der durch reguläre n-Ecke derart begrenzt wird, dass der Durchschnitt zweier regulärer n-Ecke leer ist oder aus genau einer gemeinsamen Kante besteht und an jeder Ecke genau m Kanten zusammenstoßen.

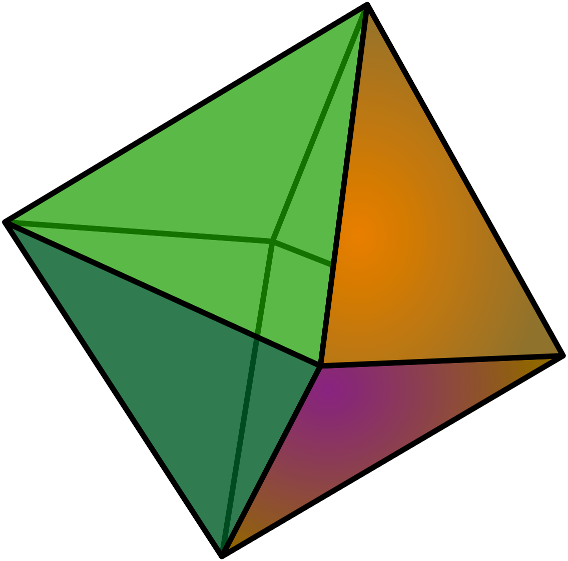
Tetraeder



Hexaeder

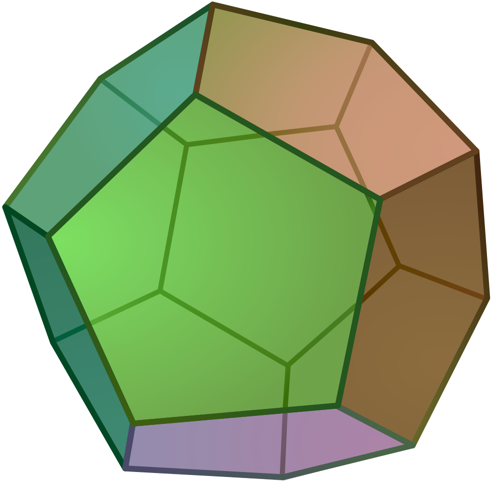


Oktaeder



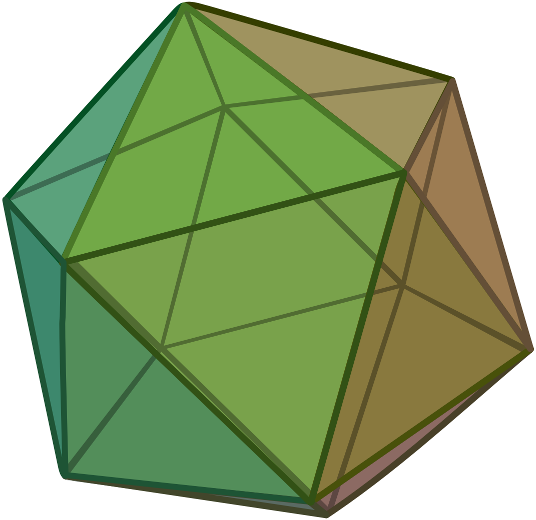
Dodekaeder

POV-Ray-Dodecahedron.svg



Ikosaeder

Icosahedron.svg



- Obwohl es beliebig viele regelmäßige Vielecke gibt, existieren nur fünf regelmäßige Körper:

  Tetraeder,
  Hexaeder (oder Würfel),
  Oktaeder,
  Dodekaeder,
  Ikosaeder.

- Das wollen wir mit Hilfe der Euler-Charakteristik beweisen.
- Die Oberfläche eines Platonischen Körpers ist zu der Kugeloberfläche homöomorph.
- Also gilt

$$E - K + F = 2.$$

- Offensichtlich gilt auch

$$mE = 2K$$

und

$$nF = 2K$$

- Daraus folgt die Gleichung

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{K} + \frac{1}{2}.$$

- Offensichtlich muss $m, n \geq 3$ gelten.

- Aus der letzten Gleichung folgt

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

- Also ist nur möglich

$$\begin{aligned} m = 3 \quad n &= 3; \\ m = 4 \quad n &= 3; \\ m = 3 \quad n &= 4; \\ m = 3 \quad n &= 5; \\ m = 5 \quad n &= 3; \end{aligned}$$

Körper	m	n	E	K	F
Tetraeder	3	3	6	4	4
Hexaeder	3	4	12	8	6
Oktaeder	4	3	12	6	8
Dodekaeder	3	5	30	20	12
Ikosaeder	5	3	30	12	20

Entwicklung der Mathematik

- Alles, was bisher in diesem Vortrag erzählt worden ist, ist seit dem 18. Jahrhundert oder früher bekannt.
- Das gilt beispielsweise auch für den Stoff, der in einer typischen Analysis-Vorlesung im ersten Semester gelesen wird.

- Mathematik vergeht nicht.
- Es wird nie der Zeitpunkt kommen, an dem alle mathematischen Fragen beantwortet sind.

Mathematik als Schlüsseltechnologie

- Allmählich wächst in der Politik und der Gesellschaft das Bewußtsein, dass Mathematik eine Schlüsseltechnologie ist und in verstärktem Maße sein wird.
- Man kann das an dem konkreten Bedarf an Mathematik in Anwendungen oder an indirekten Indikatoren erkennen.

- Mathematik zu betreiben, kostet vergleichsweise wenig Geld, und man kann durch ihren Einsatz Technik wesentlich effizienter und billiger machen.
- Allerdings wird es wichtig sein, wirklich harte Mathematik zu benutzen, die aus der Grundlagenforschung erwächst und dann in mehreren Stufen auf Anwender übertragen wird.

- Dazu müssen die Anwender noch mehr Mathematik lernen und die Mathematiker besser verstehen, was die Anwender brauchen.
- Insbesondere stellen sich neue Herausforderungen an die Ausbildung von Mathematikern als Arbeitnehmer in der Industrie, Lehrer und Wissenschaftler.

- Gleichzeitig ist aber die Mathematik selber faszinierend und kann durchaus als eine Art Philosophie oder Kunst betrachtet werden, völlig unabhängig von ihrem Nutzen.

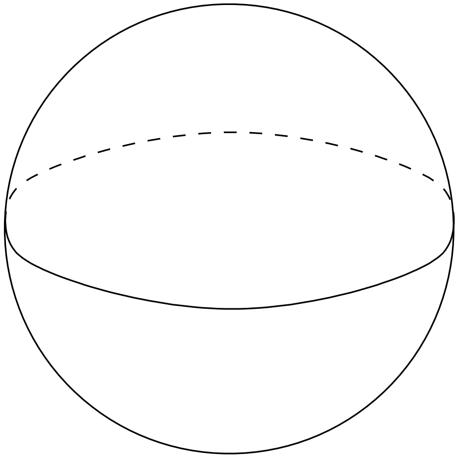
- In der verbleibenden kurzen Zeit will ich versuchen, das und meine eigene Begeisterung für Mathematik an meiner eigenen Forschung zu vermitteln.

Topologische Starrheit

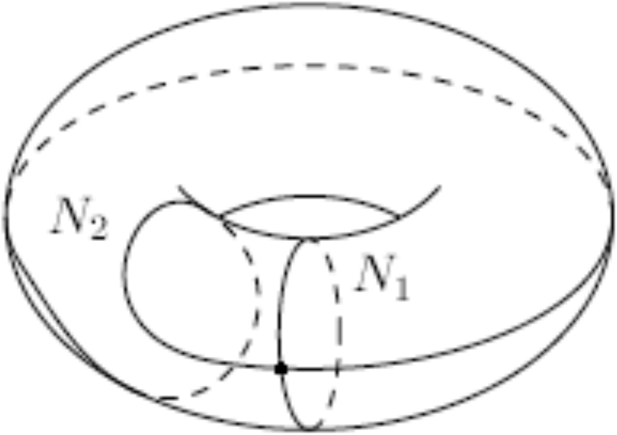
- Man kann anstatt Flächen in der Dimension zwei auch höher-dimensionale Analoga betrachten, sogenannte *n-dimensionale Mannigfaltigkeiten*.

- Eine wichtige Invariante ist die sogenannte Fundamentalgruppe.
- Sie misst, inwiefern 1-dimensionale Schleifen in der Mannigfaltigkeit nullhomotop sind, d.h. durch einen stetigen Prozess zu einer konstanten Schleife deformiert werden können.

- Die Fundamentalgruppe einer Sphäre ist trivial.



- Die Fundamentalgruppe eines Donuts ist nicht trivial.



Vermutung (Borel (1950))

Asphärische Mannigfaltigkeiten sind topologisch starr, d.h. zwei asphärische Mannigfaltigkeiten sind genau dann homöomorph, wenn ihre Fundamentalgruppen übereinstimmen.

- Asphärisch bedeutet, dass die höher-dimensionalen Analoga der Fundamentalgruppe alle trivial sind.

Theorem (Bartels-Lück(2009))

Die Borel-Vermutung ist richtig, wenn die Fundamentalgruppe hyperbolisch ist.

- Fast alle Gruppen haben die Eigenschaft, hyperbolisch zu sein.

- Das Resultat ist sehr befriedigend, da die komplizierte Klassifikation von Mannigfaltigkeiten bis auf Homöomorphie durch eine vergleichsweise einfache Invariante wie die Fundamentalgruppe geschieht.

Das Universum von Mannigfaltigkeiten

- Man vermutet , dass eine generische Mannigfaltigkeit asphärisch ist.
- Die einzige Fläche, die nicht asphärisch ist, ist die Sphäre.
- Es gibt die Vermutung, dass asphärische Mannigfaltigkeiten asymmetrisch sind, d.h. keine Symmetrien besitzen.

- Das alles zusammen impliziert:

  Eine generische Mannigfaltigkeit ist topologisch starr und asymmetrisch.

- Diese Folgerung und daher das oben erwähnte Theorem waren völlig unerwartet. Sie widersprechen der Intuition, da viele prominente Mannigfaltigkeiten weder starr noch asymmetrisch sind.

- Wieso widerspricht die Intuition den Fakten, die die Mathematik liefert?
- Das scheint an der Sehnsucht der Menschen nach Vielfalt und Symmetrie zu liegen.

- Schauen wir mal unser Universum an, in dem wir leben.
- An einem generischen Ort haben wir extrem niedrige Temperaturen, es ist dunkel, alles ist starr und gleich.
- In extremen Ausnahmefällen trifft man auf die Biosphäre eines Planeten, dort ist es ungewöhnlich warm, es ist hell, es gibt eine große Vielfalt.

- Das sind die Orte, die Menschen mögen und die sich vorstellen können. Der Rest des Universums wird ausgeblendet.
- Das ist wie im Universum von Mannigfaltigkeiten.

Christiane Lokar:

Unberechenbar


Du liebst mich doch, gerade weil ich so herrlich unberechenbar bin, stimmt's Schatz?
KITTIHAWK

Christiane Lokar:

Kurvendiskussion


... und was kostet eine Kurvendiskussion?
KITTIHAWK

Christiane Lokar:

Das Ja(hr) der Mathematik

Das JA der Mathematik

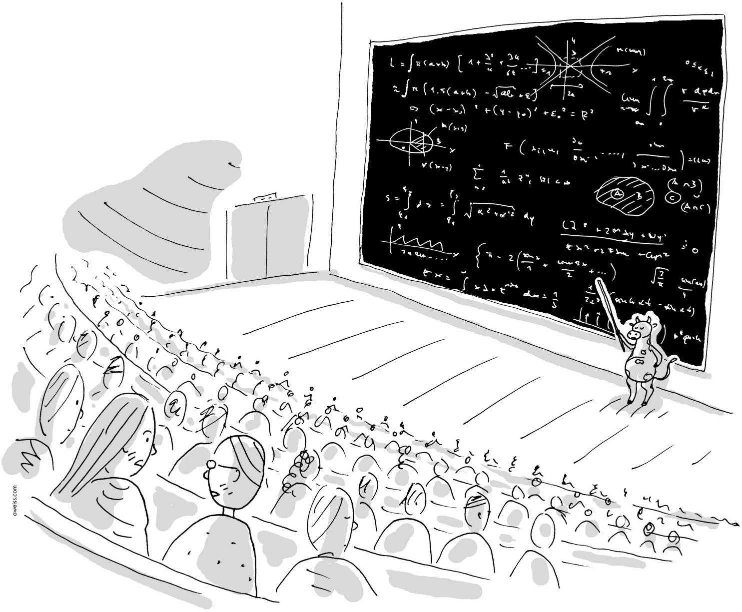
Oliver Weiss:

Verrückt

Text:

- Zuhörerin: Meinst Du nicht, dass das völlig verrückt ist, Anatol?
- Zuhörer (Anatol): Auf alle Fälle. Da müsste bei dem zweiten Integral anstatt ϵ ein ϵ_0 stehen.

Hauptdarsteller



– *"So you don't think this is weird at all, Anatol?"*
– *"Absolutely. There should be an ε_0 in the second integral as opposed to an ε."*