

Die Sprache, die Faszination
und die Bedeutung der
Mathematik

Wolfgang Lück (Bonn)

Bonn, Mai 2020

Hinweis

- ▶ Dies ist keine Vorlesung.
- ▶ Dies ist ein **interaktiver Vortrag**.
- ▶ **Mitmachen** und **Mitdenken** erwünscht.

Sprache Mathematik

- ▶ **UISTZWEIPIR**

- ▶

$$U = 2\pi r$$

- ▶

$$U = 2 \cdot \pi \cdot r$$

- ▶ Die Formel besagt:
Der Umfang eines Kreises ist proportional zu seinem Radius, wobei der Proportionalitätsfaktor das Doppelte der Zahl π ist, die ihrerseits gleich dem Flächeninhalt eines Kreises vom Radius 1 ist.

- ▶ Die Zahl π hat keine Darstellung als periodische Dezimalzahl.
- ▶

$$\pi = 3.14159265358979323846264\dots$$



$$1 = \sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot \binom{n+1}{i+1}$$

- ▶ Es bedeutet

$$\binom{n+1}{i+1} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-i+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (i+1)}$$

- ▶ Zum Beispiel erhält man für $n = 3$

$$\binom{n+1}{i+1} = \begin{cases} 4 & \text{falls } i = 0, \\ 6 & \text{falls } i = 1, \\ 4 & \text{falls } i = 2, \\ 1 & \text{falls } i = 3. \end{cases}$$

- ▶ Also besagt die Formel für $n = 3$

$$1 = 4 - 6 + 4 - 1.$$

- ▶ Mathematik ist unter anderem eine extrem komplizierte und reichhaltige Sprache.
- ▶ Das macht sie einerseits schwer verständlich.
- ▶ Andererseits ist das eines ihrer Erfolgsgeheimnisse.

Sprachexperiment

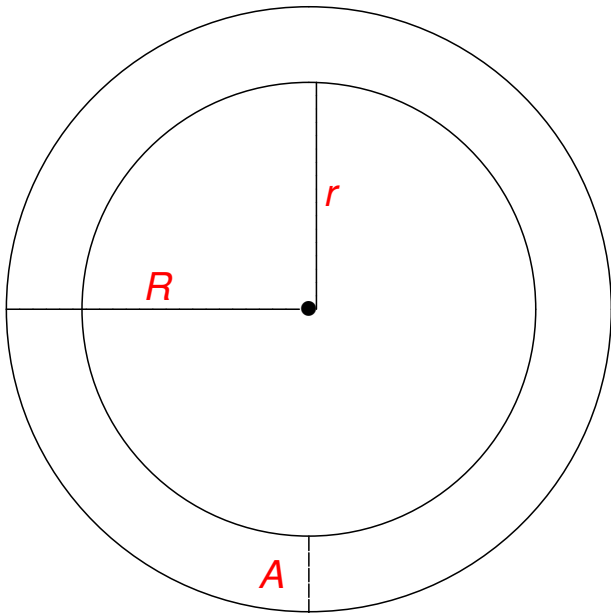
- ▶ Mähen Äbte Heu?
- ▶ Äbte mähen nie Heu.
- ▶ Äbte beten.

Ein Gedankenexperiment

- ▶ Stellen Sie sich die Erde als vollkommene Kugel vor.
- ▶ Um den Äquator legen wir ein Metallband.
- ▶ Die Länge ist etwa 40.000.000 m.
- ▶ Wir öffnen das Band und verlängern es um 1m auf 40.000.001 m.
- ▶ Danach lassen wir es gleichmäßig vom Äquator abstehen.

▶ Frage:

Kann eine Maus unter dem Band herkriechen?



- ▶ Sei u bzw. U der Umfang des Bandes vor bzw. nach dem Verlängern. Es gilt

$$U - u = 1m.$$

- ▶ Sei r bzw. R der Radius des Kreises, den das Band vor bzw. nach dem Verlängern beschreibt.

- ▶ Sei A der Abstand, den das Band nach dem Verlängern von der Erdoberfläche hat. Es gilt

$$A = R - r.$$

- ▶ Es gilt

$$U = 2 \cdot \pi \cdot R,$$

$$u = 2 \cdot \pi \cdot r.$$

- ▶ Subtrahiert man diese Gleichungen voneinander, erhält man

$$\begin{aligned} 1m &= U - u \\ &= 2 \cdot \pi \cdot R - 2 \cdot \pi \cdot r \\ &= 2 \cdot \pi \cdot (R - r) \\ &= 2 \cdot \pi \cdot A. \end{aligned}$$

- ▶ Dividiert man durch $2 \cdot \pi$, so erhält man

$$A = \frac{1m}{2 \cdot \pi} \geq 15cm.$$

- ▶ Der Abstand A hängt gar nicht von dem Radius der Kugel ab, mit der wir gestartet sind.
- ▶ Die Antwort auf die Frage ist also “Ja”.

Fehlerkorrektur

- ▶ Mathematik kann benutzt werden, um effektiv Übertragungsfehler zu korrigieren.
- ▶ Wir erläutern dies am sogenannten **Hamming Code**.
- ▶ Aufgabe: Übertrage eine Folge von vier Zeichen, wobei jedes der Zeichen entweder 0 oder 1 ist.
- ▶ Zum Beispiel 0, 1, 1, 0 oder 0, 0, 1, 1.

- ▶ Eine Idee ist, die Übertragung einmal zu wiederholen.
- ▶ Gehen wir davon aus, dass insgesamt nur **höchstens ein** Fehler auftritt.
- ▶ Dann weiß der Empfänger, dass bei der Übertragung kein Fehler aufgetreten ist, oder an welcher Stelle der Fehler war.
- ▶ Er kann ihn aber nicht korrigieren.

▶ Empfangen: 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1
Gesendet: 1, 0, 0, 1

▶ Empfangen: 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1
Gesendet: 1, 0, ?, 1

▶ Empfangen: 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1
Gesendet: ?, 0, 0, 1

- ▶ Eine weitere Idee ist, die Übertragung zweimal zu wiederholen.
- ▶ Gehen wir wieder davon aus, dass insgesamt nur **höchstens ein** Fehler auftritt.
- ▶ Dann kann der Übertragungsfehler sogar korrigiert werden.

- ▶ Empfangen:

1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1

Gesendet: 1, 0, 0, 1

- ▶ Empfangen:

1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1

Gesendet: 1, 0, 0, 1,

Fehler an 7. Stelle

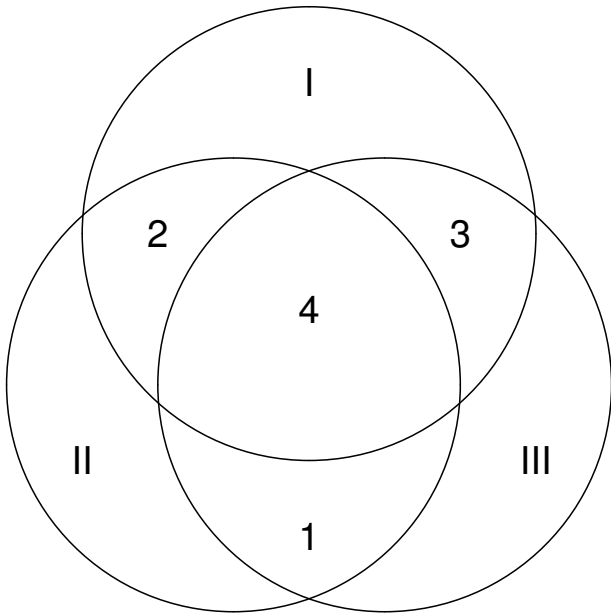
▶ Empfangen:

1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1

Gesendet: 1, 0, 0, 1

Fehler an 5. Stelle

- ▶ Diese Methode ist sehr ineffektiv.
- ▶ Für die Übertragung von vier Bits werden acht Korrektur-Bits angehängt.
- ▶ Der **Hamming Code** schafft dasselbe Ergebnis, aber mit nur drei Korrektur-Bits.



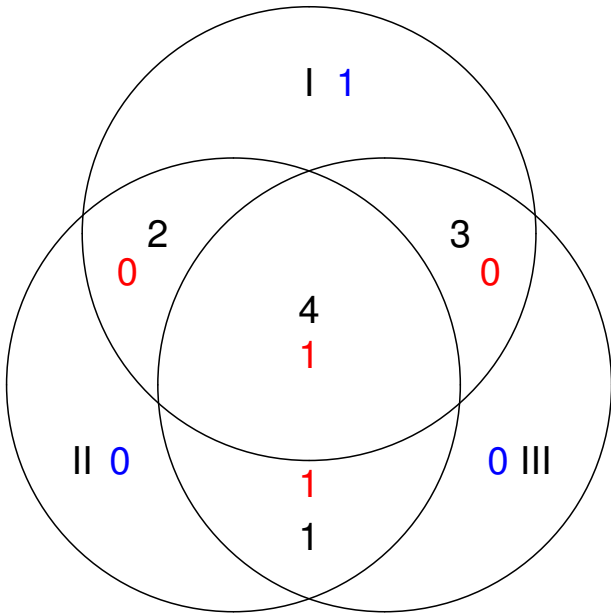
- ▶ Trage die vier zu übertragenden Bits an die Stellen 1, 2, 3 und 4 in der obigen Konfiguration ein.
- ▶ Dann bestimme die Korrektur-Bits nach folgender **Kreisregel**:
- ▶ Die Summe der Bits in jedem der einzelnen Kreise soll eine gerade Zahl sein.

- ▶ Übertrage das Wort bestehend aus sieben Bits, nämlich den vier gegebenen Bits und den drei Korrektur-Bits.
- ▶ Wir gehen wieder davon aus, dass nur höchstens ein Fehler passiert ist.

- ▶ Falls bei dem Empfänger die Kreisregel immer noch erfüllt ist, weiß er, dass kein Fehler aufgetreten ist.
- ▶ Falls bei dem Empfänger die Kreisregel nicht mehr für alle Kreise erfüllt ist, kann er das falsch übertragende Bit folgendermaßen bestimmen.

- ▶ Das falsch übertragende Bit ist das Bit, das in allen Kreisen liegt, für die die Kreisregel verletzt ist, aber in keinem Kreis, für die die Kreisregel erfüllt ist.

- ▶ Beispiel
- ▶ Wir wollen 1, 0, 0, 1 übertragen.
- ▶ Die Korrektur-Bits lauten: 1, 0, 0
- ▶ Also wird 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0 gesendet.



- ▶ Wir gehen wieder davon aus, dass nur höchstens ein Fehler passiert ist.

- ▶ Empfangen: 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0

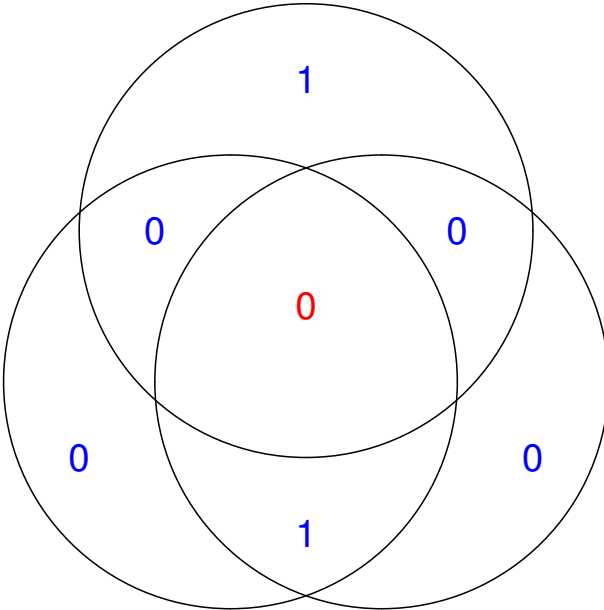
Kein Fehler

Gesendet: 1, 0, 0, 1

- ▶ Empfangen: 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0

Fehler an 4. Stelle

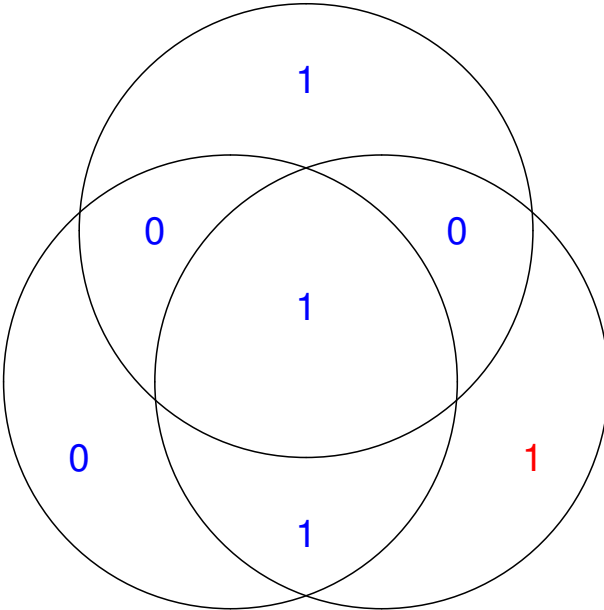
Gesendet: 1, 0, 0, 1



▶ Empfangen: 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1

Fehler an 7. Stelle

Gesendet: 1, 0, 0, 1



- ▶ Die Korrektur von Fehlern bei der Datenübertragung spielt eine zentrale Rolle beispielsweise in der Kommunikation zwischen Satelliten oder bei dem Abspielen einer CD.
- ▶ Mathematik macht es überhaupt erst möglich, dass diese Dinge funktionieren.

Kann man Mathematik missbrauchen?

- ▶ Die Mathematik selbst ist unschuldig.
- ▶ Die Menschen, die sie entwickeln oder benutzen, aber nicht.
- ▶ Konkrete Anwendungen, Sponsoren

- ▶ Aber auch theoretische Mathematiker, die an den Grundlagen arbeiten, können sich der Verantwortung nicht entziehen.
- ▶ Das Potential von Mathematik, die zunächst als reine Grundlagenforschung ohne Anwendungsbezug entwickelt worden ist, ist nicht vorhersehbar.

Ein paar Statistiken zum Mitdenken

- ▶ Die folgenden Statistiken sind korrekt.
- ▶ Frage: Was ist Ihr spontaner Gedanke?

- ▶ Lebenspartner
- ▶ Geschiedene Leute haben eine höhere Lebenserwartung.

- ▶ Karriere
- ▶ Leute in Führungspositionen haben größere Füße.

- ▶ Religion
- ▶ Mehr als siebenzig Prozent aller Verbrecher in Bayern sind katholisch.

Topologen, Donuts und Kaffeetassen

- ▶ Häufig zitierte Phrase:
- ▶ Ein Topologe ist jemand, der einen Donut nicht von einer Kaffeetasse unterscheiden kann.

- ▶ Schon besser:
- ▶ Ein Topologe ist jemand, der einen Donut von einer Kaffeetasse unterscheiden kann, aber nicht unbedingt will.

- ▶ Noch besser:
- ▶ Topologen hatten die geniale Einsicht, dass in einem gewissen Sinn das geometrische Gebilde, das ein Donut beschreibt, dasselbe ist wie das geometrische Gebilde, das eine Kaffeetasse beschreibt.

Homöomorphie

- ▶ Seien M und N zwei geometrische Gebilde.
- ▶ Sie heißen **homöomorph**, wenn es stetige Abbildungen $f: M \rightarrow N$ und $g: N \rightarrow M$ gibt derart, dass $g \circ f = \text{id}_M$ und $f \circ g = \text{id}_N$ gelten.

- ▶ Anschaulich bedeutet dies, dass man durch Ziehen und Zerren ein Gebilde in das andere überführen kann, ohne dass man zwischenzeitlich etwas aufschneidet oder zerreißt und wieder zusammenfügt.

- ▶ Eine Kugel vom Radius 1 m und eine Kugel vom Radius 1 km sind homöomorph.
- ▶ Eine Kugel und ein Würfel sind homöomorph.

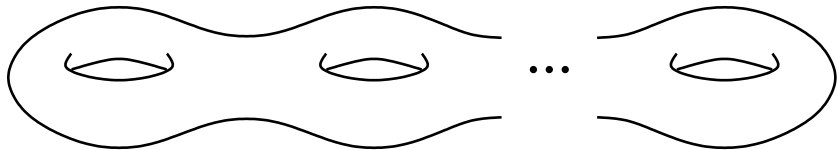
- ▶ Eine Kaffeetasse und ein Donut sind homöomorph.
- ▶ Eine Kugel und ein Donut sind **nicht** homöomorph.

Flächen

- ▶ Eine **Fläche** ist ein geometrisches geschlossenes Teilgebilde im drei-dimensionalen Raum, das lokal homöomorph zum zwei-dimensionalen Raum ist.
- ▶ Jede Fläche ist zu genau einer Standardfläche vom Geschlecht g homöomorph.

► Fläche vom Geschlecht g .

(Das Geschlecht ist die Anzahl der Löcher).



- ▶ Die folgenden Bilder zeigen Objekte, deren Oberfläche eine Fläche beschreibt.
- ▶ Frage: Was ist ihr Geschlecht?

















Euler-Charakteristik

- ▶ Man kann jede Fläche mit Vielecken so überdecken, dass zwei Vielecke sich gar nicht berühren oder ihr Durchschnitt genau aus einer Kante besteht.



© 2001 Winston Mitchell

- ▶ Die **Euler-Charakteristik** χ so einer Überdeckung ist definiert als

$$\chi = E - K + F.$$

- ▶ Dabei sind E , K und F die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen.

- ▶ Die Euler-Charakteristik hängt nicht von der Wahl der Überdeckung ab.
- ▶ Zwei Flächen sind genau dann homöomorph, wenn sie dieselbe Euler-Charakteristik haben.



$$\chi(F_g) = 2 - 2g$$

- ▶ Die Euler-Charakteristik der Kugeloberfläche F_0 ist 2.
- ▶ Die Euler-Charakteristik der Oberfläche eines Donuts F_1 ist 0.
- ▶ Die Euler-Charakteristik der Oberfläche einer Kaffeetasse ist auch 0.

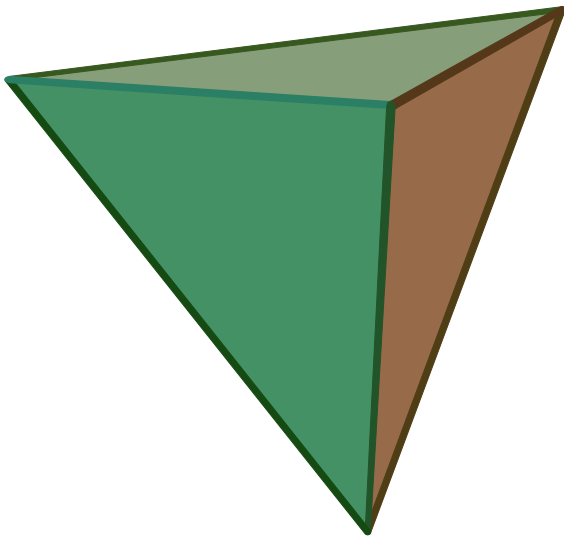
Platonische Körper

- ▶ Ein **Platonischer Körper** ist ein konvexer Körper im Raum, der durch reguläre n -Ecke derart begrenzt wird, dass der Durchschnitt zweier regulärer n -Ecke leer ist oder aus genau einer gemeinsamen Kante besteht und an jeder Ecke genau m Kanten zusammenstoßen.

Tetraeder

Tetrahedron.svg

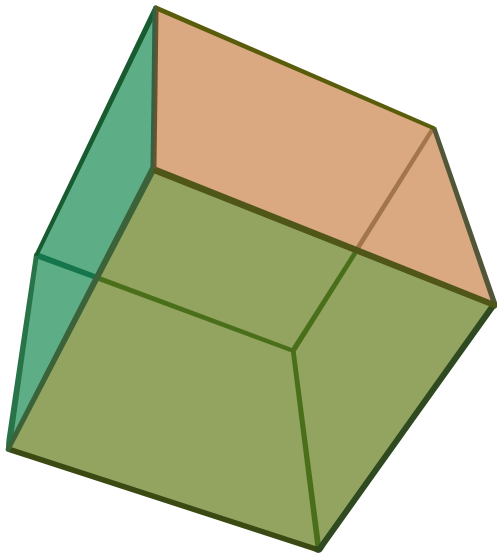
11.06.08 23:45



Hexaeder

Hexahedron.svg

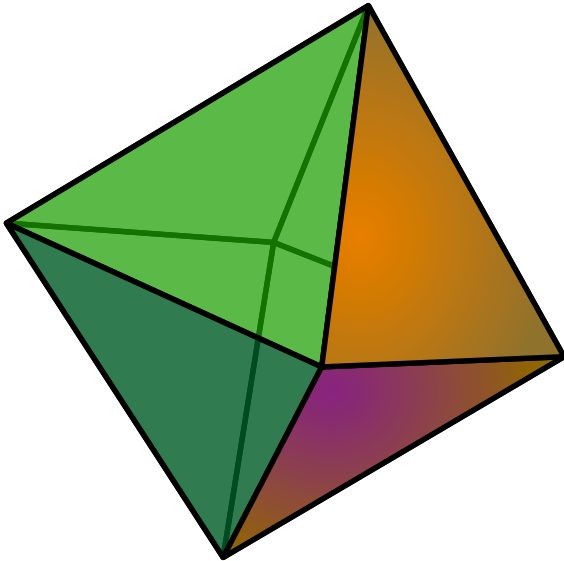
11.06.08 23:58



Oktaeder

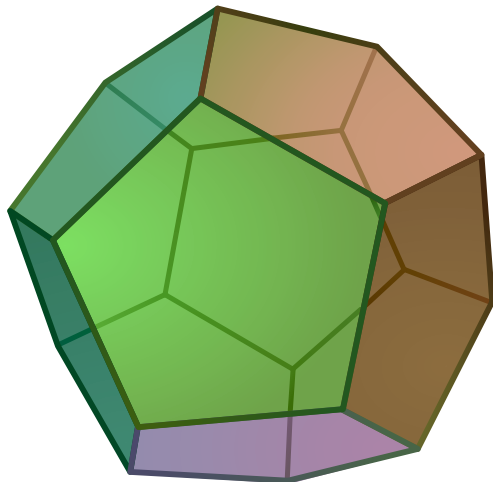
Octahedron.svg

12.06.08 00:00



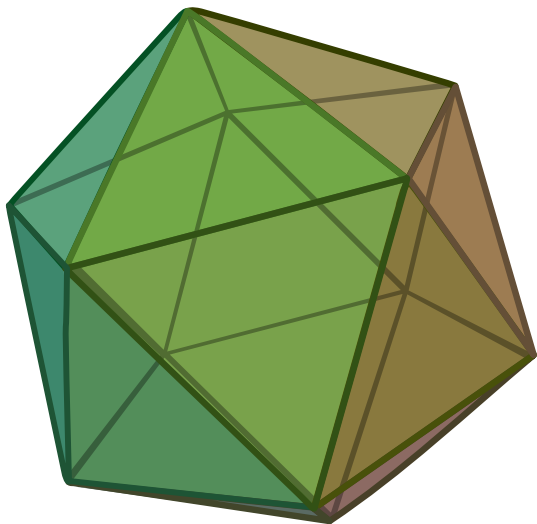
Dodekaeder

POV-Ray-Dodecahedron.svg



Ikosaeder

Icosahedron.svg



- ▶ Obwohl es beliebig viele regelmäßige Vielecke gibt, existieren nur fünf regelmäßige Körper:

Tetraeder,

Hexaeder (oder Würfel),

Oktaeder,

Dodekaeder,

Ikosaeder.

- ▶ Das wollen wir mit Hilfe der Euler-Charakteristik beweisen.
- ▶ Die Oberfläche eines Platonischen Körpers ist zu der Kugeloberfläche homöomorph.
- ▶ Also gilt

$$E - K + F = 2.$$

- ▶ Offensichtlich gilt auch

$$mE = 2K$$

und

$$nF = 2K$$

- ▶ Daraus folgt die Gleichung

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{K} + \frac{1}{2}.$$

- ▶ Offensichtlich muss $m, n \geq 3$ gelten.

- ▶ Aus der letzten Gleichung folgt

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

- ▶ Also ist nur möglich

$$m = 3 \quad n = 3;$$

$$m = 4 \quad n = 3;$$

$$m = 3 \quad n = 4;$$

$$m = 3 \quad n = 5;$$

$$m = 5 \quad n = 3;$$

Körper	m	n	E	K	F
Tetraeder	3	3	6	4	4
Hexaeder	3	4	12	8	6
Oktaeder	4	3	12	6	8
Dodekaeder	3	5	30	20	12
Ikosaeder	5	3	30	12	20

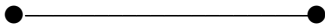
Geometrischer Beweis der Formel

$$1 = \sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot \binom{n+1}{i+1}$$

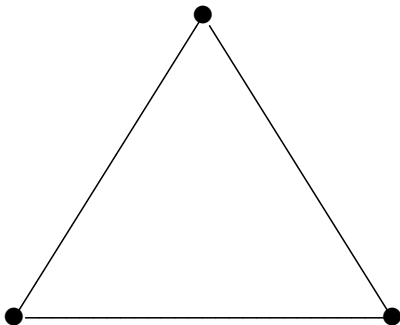
- ▶ Es gibt ein n -dimensionales Gebilde, das n -Simplex Δ_n .
- ▶ Es ist die konvexe Hülle der Punkte $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots
 $(0, 0, \dots, 1)$.
- ▶ Δ_0 ist ein Punkt.



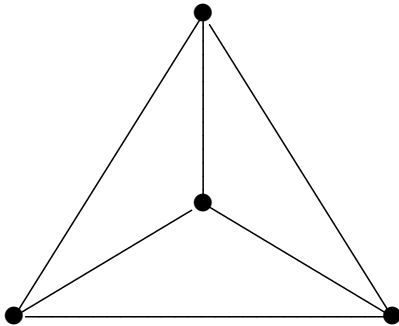
- ▶ Δ_1 ist ein Intervall $[0, 1]$.



- ▶ Δ_2 ist ein Dreieck.



- ▶ Δ_3 ist der Tetraeder.



- ▶ Man kann auch für Δ_n eine Euler-Charakteristik definieren, indem man die Anzahl der i -dimensionalen Seiten mit wechselnden Vorzeichen zählt.
- ▶ Δ_n und Δ_0 sind zwar nicht homöomorph, aber in einem noch schwächeren Sinne gleich, nämlich **homotopieäquivalent**.

- ▶ Was bedeutet es, zu Δ_0 homotopieäquivalent zu sein?

- ▶ Das impliziert $\chi(\Delta_n) = \chi(\Delta_0) = 1$.
- ▶ Das kann man für $n \leq 3$ an den Bildern überprüfen.
- ▶ Die Anzahl der i -dimensionalen Seiten in Δ_n ist

$$\binom{n+1}{i+1}.$$

- ▶ Also gilt

$$1 = \chi(\Delta_0) = \chi(\Delta_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot \binom{n+1}{i+1}.$$

- ▶ Dies ist ein geometrischer Beweis einer kombinatorischen Formel.