

Topologische K -Theorie

Eine Einführung

VON

Clemens Bratzler und Wolfgang Lück

a

WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	5
1 Zusammenfassung und Übersicht	7
2 Grundlagen über Vektorraumbündel	11
3 K-Theorie und kohomologische Eigenschaften	21
4 Produkte in K-Theorie	33
4.1 Vektorraumbündel-Kettenkomplexe	33
4.2 Definition von Produkten in K -Theorie	41
5 Bott-Periodizität	45
5.1 Der Periodizitätssatz und Folgerungen	45
5.2 Vektorraumbündel über $X \times S^2$	50
5.3 Polynomiale und lineare Klebefunktionen	54
5.4 Beweis der Bott-Periodizität	58
6 Thom-Isomorphismus	65
6.1 Beweis des Thom-Isomorphismus'	65
6.2 Berechnung des Ringes $K^*(\mathbb{C}P^n)$	72
7 H-Raum-Strukturen auf Sphären und Hopf-Invariante	79
7.1 Abbildungsgrad und Bigrad	79
7.2 Hopf-Invariante	81
7.3 Adams-Operationen	87
7.4 H -Raum-Strukturen auf Sphären	92

Literaturverzeichnis	97
Index	99

Einleitung

Anlaß für dieses Skript war ein Seminar über Topologische K -Theorie im Sommersemester 1998 an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster. Dafür wollten wir den Teilnehmern einen in sich geschlossenen Text über das Thema zur Hand geben, den sie mit Grundlagenwissen in Algebraischer Topologie und über Vektorraumbündel leicht selbständig lesen können. Bei den meisten Beweisen wird deshalb recht ausführlich vorgegangen, auch technische Details werden oftmals ausgeführt. Obwohl wir uns weitgehend an den „klassischen“ K -Theorie-Büchern von Atiyah [Ati] und Karoubi [Ka] orientiert haben, ist das Skript im Detail ausführlicher. Inhaltlich wurde der Stoff dagegen auf den unserer Meinung nach bei einer ersten Beschäftigung mit K -Theorie wesentlichen Stoff reduziert, nämlich komplexe K -Theorie kompakter (Hausdorff-)Räume. In einem einsemestrigem zweistündigen Seminar läßt sich der Text gut bewältigen.

Im Unterschied zu den genannten Büchern definieren wir K -Theorie gleich in relativer Form: $K^0(X, A)$ besteht als Menge aus den stabilen Isomorphieklassen von gewissen „Tripeln“ $[E_1, f, E_0]$ über dem Raumpaar (X, A) . Wir verzichten daher auf die Verwendung der Grothendieck-Konstruktion (vgl. Kapitel 3). Auch beim Beweis der Bott-Periodizität wird im Detail etwas anders verfahren als üblich (vgl. Kapitel 5). Der Thom-Isomorphismus (Kapitel 6) wurde so formuliert, daß man mit der Definition von K -Theorie für kompakte Räume auskommt. Im letzten Kapitel erarbeiten wir zumindest noch eine beeindruckende Anwendung von K -Theorie und untersuchen die Sphären S^n auf H -Raumstruktur bzw. \mathbb{R}^n auf die Struktur einer reellen Divisionsalgebra. Die Darstellungsweise orientiert sich dabei an dem entsprechenden Kapitel bei Karoubi [Ka].

Die gelegentlich eingestreuten Übungsaufgaben erheben keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Sie sind meist nur als sinnvolle Ergänzungen zum Text gedacht. Dieses Skript ist gewiß kein Nachschlagewerk - dennoch gibt es am Ende zur besseren Orientierung auch einen Index.

An dieser Stelle möchten wir noch Juliane Jänich, Morten Pohlers, Roman Sauer und Christian Wegner für das gründliche Durcharbeiten des Textes, viele Korrekturen und Verbesserungsvorschläge danken. Vielleicht kann das Skript auch künftig manchem beim Einstieg in Topologische K -Theorie hilfreich sein.

Kapitel 1

Zusammenfassung und Übersicht

Definition 1.1. Eine *verallgemeinerte Kohomologietheorie* ist eine Folge von Abbildungen

$$h^n : \{\text{Paare } (X, A) \text{ topologischer Räume}\} \longrightarrow \{\text{abelsche Gruppen}\}$$

und sogenannter *Randoperatoren* $\partial^{(X,A)} : h^n(A, \emptyset) \longrightarrow h^{n+1}(X, A)$, so daß folgende Axiome erfüllt sind:

(i) *Funktorialität*

$(h^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ist eine Familie von kontravarianten Funktoren von der Kategorie der Paare topologischer Räume in die Kategorie der abelschen Gruppen. Das bedeutet:

- (a) Jedem Paar (X, A) wird eine abelsche Gruppe $h^n(X, A)$ zugeordnet.
- (b) Eine stetige Abbildung $f : (X, A) \longrightarrow (X', A')$ von Raumpaaren induziert Homomorphismen

$$f^* := h^n(f) : h^n(X', A') \longrightarrow h^n(X, A),$$

wobei gilt $\text{Id}^* = \text{Id}$ und $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ für $(X, A) \xrightarrow{f} (X', A') \xrightarrow{g} (X'', A'')$.

(ii) *Natürlichkeit*

$\partial := \partial^{(X,A)} : h^n(A, \emptyset) \longrightarrow h^{n+1}(X, A)$ ist ein natürlicher Homomorphismus, d.h. für jede Abbildung $f : (X, A) \longrightarrow (X', A')$ von Raumpaaren kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} h^n(A', \emptyset) & \xrightarrow{\partial^{(X',A')}} & h^{n+1}(X', A') \\ \downarrow (f|_A)^* & & \downarrow f^* \\ h^n(A, \emptyset) & \xrightarrow{\partial^{(X,A)}} & h^{n+1}(X, A) \end{array}$$

(iii) *Exaktheit*

Für die kanonischen Inklusionen $(A, \emptyset) \xrightarrow{i} (X, \emptyset) \xrightarrow{j} (X, A)$ ist die Sequenz

$$\dots \xrightarrow{\partial} h^n(X, A) \xrightarrow{j^*} h^n(X, \emptyset) \xrightarrow{i^*} h^n(A, \emptyset) \xrightarrow{\partial} h^{n+1}(X, A) \longrightarrow \dots$$

exakt.

(iv) *Homotopieinvarianz*

Sind $f, g : (X, A) \longrightarrow (X', A')$ homotope Abbildungen von Raumpaaren, so gilt $f^* = g^*$.

(v) *Ausschneidung*

Sei (X, A) ein Raumpaar, $U \subset A$, so daß der Abschluß \bar{U} von U in X noch ganz im Inneren von A liegt. Dann ist die von der Inklusion $i : (X \setminus U, A \setminus U) \hookrightarrow (X, A)$ induzierte Abbildung

$$i^* : h^n(X, A) \longrightarrow h^n(X \setminus U, A \setminus U)$$

ein Isomorphismus.

Bemerkung 1.2. (i) Es wird nichts über $h^*(\{\text{Punkt}\})$ gefordert (d.h. es gibt kein *Dimensionsaxiom*). $h^n(\{\text{Punkt}\}) =: h^n$ heißen die *Koeffizienten* der Kohomologietheorie.

(ii) $h^*(X, A) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} h^n(X, A)$ ist eine graduierte abelsche Gruppe.

(iii) Eine verallgemeinerte Kohomologietheorie kann zusätzlich ein (*externes*) *Produkt* besitzen, d.h. bilineare und assoziative Abbildungen

$$h^n(X, A) \times h^m(X', A') \longrightarrow h^{n+m}((X, A) \times (X', A')),$$

wobei man das Produkt von Raumpaaren definiert durch

$$(X, A) \times (X', A') := (X \times X', X \times A' \cup A \times X').$$

(Dies ist „vernünftig“, weil dann z.B. für das Produkt zweier berandeter Mannigfaltigkeiten $(M, \partial M) \times (N, \partial N) = (M \times N, \partial(M \times N))$ gilt.)

Man erhält so auch eine *Ringstruktur* auf $h^*(X, A)$: Ist nämlich $\Delta : X \longrightarrow X \times X$, $x \mapsto (x, x)$ die Diagonalabbildung, so liefert diese ein (inneres) Produkt

$$h^n(X, A) \times h^m(X, A) \longrightarrow h^{n+m}((X, A) \times (X, A)) \xrightarrow{\Delta^*} h^{n+m}(X, A).$$

- (iv) Analog läßt sich auch eine *verallgemeinerte Homologietheorie* definieren als eine Familie kovarianter Funktoren von der Kategorie der Raumpaare in die Kategorie der abelschen Gruppen mit Randoperatoren, so daß die Axiome aus Definition 1.1 gelten, wenn die Pfeile „umgedreht“ werden. Die einem Raumpaar zugeordneten Gruppen bezeichnet man zur Unterscheidung mit $h_n(X, A)$, induzierte Homomorphismen mit f_* .

Aufgabe 1.3. Sei (X, A) ein Raumpaar und $r : X \rightarrow A$ eine stetige Abbildung mit $r|_A = \text{Id}_A$. Zeige, daß es natürliche Isomorphismen von abelschen Gruppen

$$h^n(X) \cong h^n(X, A) \oplus h^n(A)$$

gibt. Insbesondere ergibt sich: Betrachtet man die Kategorie der punktierten Räume (X, x) (x Basispunkt in X , alle Morphismen basispunkt-erhaltend), so definiert man die zur verallg. Kohomologietheorie h^* gehörige *reduzierte verallgemeinerte Kohomologietheorie* $\tilde{h}^*(X)$ von X als

$$\tilde{h}^n(X) := h^n(X, x)$$

und hat einen natürlichen Isomorphismus

$$h^n(X) \cong \tilde{h}^n(X) \oplus h^n(x).$$

(Da es bei Kohomologie - im Unterschied zur Homologie - keinen kanonischen Homomorphismus $h^n(X) \rightarrow h^n(pt)$ gibt, muß man zur Kategorie der punktierten Räume übergehen.)

Bei den bisherigen allgemeinen Definitionen haben wir den Begriff *Raumpaar* nicht weiter spezifiziert. Im allgemeinen paßt man aber die Kategorie der betrachteten Räume in geeigneter Weise an die vorliegende (Ko-)Homologietheorie an. So beschränkt man sich z.B. bei zellulärer (Ko-)Homologie auf die Kategorie der Paare (X, A) von *CW-Komplexen*. Eine ähnliche Einschränkung wollen wir auch für die von uns entwickelte *K-Theorie* vornehmen:

Definition 1.4 (Ko-Raumpaar). Im weiteren Verlauf wollen wir unter einem *Ko-Raumpaar* (X, A) einen kompakten Hausdorffraum X mit einem abgeschlossenen Teilraum A verstehen derart, daß die Inklusion $i : A \hookrightarrow X$ eine *Kofaserung* ist. D.h. für jeden Raum Y und jede Abbildung $f : A \times I \cup X \times \{0\} \rightarrow Y$ kann man das folgende Diagramm durch $\cdots \rightarrow$ kommutativ vervollständigen (I sei das Einheitsintervall $[0, 1]$):

$$\begin{array}{ccc} A \times I \cup X \times \{0\} & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & \nearrow \cdots & \\ X \times I & & \end{array}$$

Es gilt der „Slogan“: „Jede vernünftige Inklusion ist eine Kofaserung.“

Beispiele:

- X (kompakter) CW -Komplex, A Unterkomplex von X
[Br, Ch. VII, Corollary 1.4].
- X (kompakte) Mannigfaltigkeit, A abgeschl. Untermannigfaltigkeit von X .
- Ein punktierter Raum X mit Basispunkt x heißt *wohlpunktiert*, wenn (X, x) ein Ko-Raumpaar ist.
- Ist $A \hookrightarrow X$ eine Kofaserung, $p : E \rightarrow X$ eine *Faserung* (siehe z.B. [Wh, Ch.I, 7]), etwa eine Überlagerung oder ein Vektorraumbündel, so ist die Inklusion $p^{-1}(A) \hookrightarrow p^{-1}(X) = E$ auch eine Kofaserung [Wh, Ch. I, (7.14)].

Aufgabe 1.5. Finde eine abgeschlossene Teilmenge von $I = [0, 1]$, deren Inklusion keine Kofaserung ist.

Ziel dieses Papiers ist in erster Linie der Beweis des folgenden Satzes.

Satz 1.6. Die topologische K -Theorie (die explizit später definiert wird)

$$K^n : \{Ko\text{-Raumpaare } (X, A)\} \longrightarrow \{\text{abelsche Gruppen}\}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

ist eine verallgemeinerte Kohomologietheorie mit Produkten, die 2-periodisch ist, d.h. für jedes Ko-Raumpaar (X, A) und $n \in \mathbb{Z}$ hat man einen natürlichen Isomorphismus

$$\beta_2 : K^n(X, A) \xrightarrow{\cong} K^{n-2}(X, A),$$

die sogenannte Bott-Periodizität. Auf diese Weise berechnen sich insbesondere die Koeffizienten der topologischen K -Theorie zu

$$K^n(\{\text{Punkt}\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , \quad n \text{ gerade;} \\ 0 & , \quad n \text{ ungerade.} \end{cases} \quad \square$$

Kapitel 2

Grundlagen über Vektorraumbündel

Grundbegriffe wie *Vektorraumbündel*, *Unterbündel*, *Schnitt*, *Riemannsche Metrik*, *Tangentialbündel* und Kenntnisse über lineare Algebra mit Vektorraumbündeln setzen wir in diesem Skript voraus. Falls nötig, kann man sie sich aber schnell aneignen, wenn man die Kapitel [Br-Jä, 3, 4] (ohne differenzierbare Strukturen) und/oder [Ati, 1.1-1.5] liest.

Bezeichnung 2.1. Unter Vektorraumbündeln wollen wir stets \mathbb{C} -Vektorraumbündel verstehen. Ist $p : E \rightarrow X$ ein Vektorraumbündel über dem (bei uns stets) kompakten Raum X , so bezeichnen wir für $x \in X$ mit $E_x := p^{-1}(x)$ die *Faser über x* . Wegen der lokalen Trivialität von E ist die Funktion $X \ni x \mapsto \dim_{\mathbb{C}}(E_x) \in \mathbb{N}_0$ lokal konstant. (Wir verlangen nicht, daß ein Vektorraumbündel feste Dimension hat.) Mit $Vect(X)$ bezeichnen wir meistens die Menge aller Vektorraumbündel über dem Raum X , manchmal auch die Menge der Isomorphieklassen von Vektorraumbündeln über X . Dies wird aus dem jeweiligen Zusammenhang klar.

- (i) Seien $p : E \rightarrow X$, $p' : E' \rightarrow X'$ Vektorraumbündel. Eine *Abbildung von Vektorraumbündeln* $(\bar{f}, f) : p \rightarrow p'$ ist ein Paar von stetigen Abbildungen, so daß das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\bar{f}} & E' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ X & \xrightarrow{f} & X' \end{array}$$

und für alle $x \in X$ die Restriktion $\bar{f}|_{\{x\}} : E_x \rightarrow E'_{f(x)}$ ein Vektorraum-Homomorphismus ist. (\bar{f}, f) heißt *Isomorphismus von Vektorraumbündeln*,

wenn (\bar{f}, f) als Abbildung von Vektorraumbündeln invertierbar ist (siehe Aufgabe 2.2).

- (ii) Ist $X = X'$ und $f = \text{Id}_X$, so bezeichnet man \bar{f} als *Abbildung von Vektorraumbündeln über X* . Die Abbildung \bar{f} entspricht dann einem stetigen Schnitt $X \rightarrow \text{Hom}(E, F)$, wobei $\text{Hom}(E, F)$ das Bündel über X sei, das als Menge gerade $\cup_{x \in X} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(E_x, F_x)$ ist.
- (iii) Im Unterschied dazu bezeichnen wir mit $\text{HOM}(E, F)$ den Vektorraum aller Bündelabbildungen von E nach F (ist $E = F$, so gilt die Bezeichnung $\text{END}(E)$), mit $\text{ISO}(E, F)$ die Gruppe aller invertierbaren Bündelabbildungen von E nach F ($E = F$: $\text{AUT}(E)$).

Es ist also bei Bündeln E und F über demselben Raum X

$$\text{HOM}(E, F) = \Gamma(X, \text{Hom}(E, F)),$$

d.h. der Vektorraum aller stetigen Schnitte von X in das Bündel $\text{Hom}(E, F)$.

Aufgabe 2.2. Zeige: Eine Abbildung $(\bar{f}, f) : p \rightarrow p'$ von Vektorraumbündeln $p : E \rightarrow X$, $p' : E' \rightarrow X'$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn f ein Homöomorphismus und für jedes $x \in X$ die induzierte Abbildung $\bar{f}|_{\{x\}} : E_x \rightarrow E'_{f(x)}$ bijektiv ist.

Definition 2.3 (Pull-Back von Vektorraumbündeln). Sei $p : E \rightarrow X$ ein Vektorraumbündel und $f : Y \rightarrow X$ eine stetige Abbildung. Setze

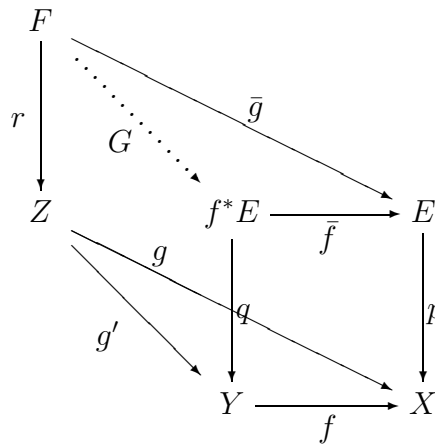
$$f^*E := \{(y, v) \in Y \times E \mid f(y) = p(v)\}.$$

Seien ferner $q : f^*E \rightarrow Y$ bzw. $\bar{f} : f^*E \rightarrow E$ die von den Projektionen auf die erste bzw. zweite Komponente induzierten Abbildungen. Dann ist $q : f^*E \rightarrow Y$ ein Vektorraumbündel über Y und heißt das *Pull-Back von E mit f* . Folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\bar{f}} & E \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Lemma 2.4 (universelle Eigenschaft des Pull-Backs). *Das Pull-Back ist durch folgende Eigenschaft (bis auf Isomorphie von Vektorraumbündeln) eindeu-*

tig charakterisiert:



Sei $r : F \rightarrow Z$ ein Vektorraumbündel, $(\bar{g}, g) : r \rightarrow p$ eine Abbildung von Vektorraumbündeln, ferner $g' : Z \rightarrow Y$ eine Abbildung mit $f \circ g' = g$. Dann gibt es genau ein $G : F \rightarrow f^*E$ derart, daß $(G, g') : r \rightarrow q$ eine Abbildung von Vektorraumbündeln ist und

$$(\bar{f}, f) \circ (G, g') = (\bar{g}, g).$$

BEWEIS:

Übungsaufgabe!

□

Vieles von dem, was man aus der Linearen Algebra über Vektorräume kennt, überträgt sich kanonisch auf Vektorraumbündel. Deshalb bezeichnet man das Rechnen mit Vektorraumbündeln auch als „parametrisierte Lineare Algebra“. (Man kann man ein Vektorraumbündel ja auch als Familie von Vektorräumen auffassen, parametrisiert durch die Punkte des Basisraumes X und versehen mit gewissen Eigenschaften.) Dennoch darf man nicht alles, was man von Vektorräumen kennt, einfach auf Vektorraumbündel übertragen, wie folgendes Beispiel zeigt:

Bemerkung 2.5. Ist $\bar{f} : E \rightarrow F$ eine Abbildung von Vektorraumbündeln über X , so sind

$$\begin{aligned} \text{Kern}(\bar{f}) &:= \bigcup_{x \in X} \text{Kern}(\bar{f}_x) \quad \text{und} \\ \text{Bild}(\bar{f}) &:= \bigcup_{x \in X} \text{Bild}(\bar{f}_x) \end{aligned}$$

im allgemeinen keine Vektorraumbündel mehr.

Beispiel: $X = [0, 1]$, $E = F = [0, 1] \times \mathbb{C}$, $\bar{f}(t, z) := t \cdot z$.

Das folgende Lemma liefert aber eine hinreichende Bedingung dafür, daß Kern und Bild einer Abbildung von Vektorraumbündeln selbst wieder Vektorraumbündel sind:

Lemma 2.6. *Ist $\bar{f} : E \rightarrow F$ eine Abbildung von Vektorraumbündeln über X und die Funktion $X \ni x \mapsto \text{Rang}(\bar{f}_x) \in \mathbb{N}_0$ lokal konstant auf X , dann ist $\text{Kern}(\bar{f})$ ein Unterbündel von E und $\text{Bild}(\bar{f})$ ein Unterbündel von F .*

BEWEIS:

[Br-Jä, Lemma 3.5]. □

Satz 2.7 (Tietzesches Erweiterungslemma). *Sei X ein topologischer Raum, in dem sich je zwei disjunkte abgeschlossene Mengen durch offene Umgebungen trennen lassen (z.B. ein kompakter Hausdorffraum). Sei $A \subset X$ abgeschlossen, V ein \mathbb{R} -Vektorraum (resp. \mathbb{C} -Vektorraum). Dann läßt sich jede stetige Funktion $f : A \rightarrow V$ zu einer stetigen Funktion $\bar{f} : X \rightarrow V$ fortsetzen. □*

Lemma 2.8 (Fortsetzung von Schnitten). *Sei X ein kompakter Hausdorffraum, $A \subset X$ abgeschlossen; seien E, E' Vektorraumbündel über X . Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (i) *Jeder Schnitt $s : A \rightarrow E$ läßt sich zu einem Schnitt auf ganz X fortsetzen.*
- (ii) *Jede Abbildung $f : E'|_A \rightarrow E|_A$ von Vektorraumbündeln über A läßt sich zu einer Abbildung $\bar{f} : E' \rightarrow E$ von Vektorraumbündeln über X fortsetzen. (Ist $f : E'|_A \rightarrow E|_A$ sogar ein Isomorphismus, so existiert eine offene Umgebung U von A in X , so daß $\bar{f}|_U$ ein Isomorphismus ist.)*

BEWEIS:

zu (i): Wähle eine endliche Überdeckung $\{U_i\}_{1 \leq i \leq n}$ von X mit subordinierter Zerlegung $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ der Eins, so daß $E|_{U_i}$ trivial ist. Dann entspricht $s|_{U_i \cap A}$ einer Abbildung nach \mathbb{C}^n und läßt sich wegen des Tietzeschen Lemmas zu einer Abbildung $\bar{s}|_{U_i} : U_i \rightarrow E|_{U_i}$ fortsetzen. Nun definiere

$$\bar{s} := \sum_{i=1}^n \bar{s}|_{U_i} \cdot \psi_i.$$

zu (ii): Die Abbildung f entspricht einem stetigen Schnitt $A \rightarrow \text{Hom}(E', E) = \bigcup_{x \in X} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(E'_x, E_x)$. Nach Teil (i) ex. also eine Fortsetzung $\bar{f} : X \rightarrow \text{Hom}(E', E)$. Für die Aussage in Klammern setze $U := \bar{f}^{-1}(\text{Iso}(E', E)) \subset X$ und beachte, daß $\text{Iso}(E', E) \subset \text{Hom}(E', E)$ offen ist. □

Lemma 2.9. *Sei $p : E \rightarrow X \times [a, b]$ ein Vektorraumbündel. Es gebe $c \in (a, b)$, so daß $E|_{X \times [a, c]}$ und $E|_{X \times [c, b]}$ trivial sind. Dann ist E trivial.*

BEWEIS:

Wähle Trivialisierungen $u_a : X \times [a, c] \times \mathbb{C}^n \xrightarrow{\cong} E|_{X \times [a, c]}$ und $u_b : X \times [c, b] \times \mathbb{C}^n \xrightarrow{\cong} E|_{X \times [c, b]}$. Sei dann

$$h := (u_b|_{X \times \{c\} \times \mathbb{C}^n})^{-1} \circ u_a|_{X \times \{c\} \times \mathbb{C}^n} : X \times \{c\} \times \mathbb{C}^n \xrightarrow{\cong} X \times \{c\} \times \mathbb{C}^n,$$

wobei $h(x, v) := (x, g(x)v)$ mit $g : X \rightarrow \text{Iso}(\mathbb{C}^n)$ sei. Nun definiere

$$w : X \times [c, b] \times \mathbb{C}^n \longrightarrow X \times [c, b] \times \mathbb{C}^n$$

durch $w(x, t, v) := (x, t, g(x)v)$. Dann stimmen die beiden Bündelabbildungen u_a und $u_b \circ w$ auf $X \times \{c\} \times \mathbb{C}^n$ überein. Man kann sie daher zu einem Bündelisomorphismus $u : X \times [a, b] \times \mathbb{C}^n \xrightarrow{\cong} E$ zusammensetzen. \square

Lemma 2.10. *Sei $p : E \rightarrow X \times I$ ($I := [0, 1]$) ein Vektorraumbündel. Dann existiert eine endliche offene Überdeckung $\{U_i\}_{i=1}^n$ von X , so daß $E|_{U_i \times I}$ trivial ist.*

BEWEIS:

Zu $x \in X$ und $t \in I$ existieren wegen der lokalen Trivialität von E offene Umgebungen $x \in U(t) \subset X$ und $t \in I(t) \subset I$, so daß $E|_{U(t) \times I(t)}$ trivial ist. Dadurch erhält man, da I kompakt ist, eine endliche Folge $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ mit offenen Umgebungen U_i von x , so daß $E|_{U_i \times [t_{i-1}, t_i]}$ für $1 \leq i \leq n$ trivial ist. Sei nun $U := \bigcap_{i=1}^n U_i$. Anwendung von Lemma 2.9 liefert: $E|_{U \times I}$ ist trivial. X wird als kompakter Raum von endlich vielen solcher offenen Mengen U überdeckt. \square

Satz 2.11. *Sei $p : E \rightarrow X \times I$ ein Vektorraumbündel und $E_1 := E|_{X \times \{1\}}$, aufgefaßt als Vektorraumbündel über X .*

(i) *Dann gibt es einen Isomorphismus von Vektorraumbündeln über $X \times I$*

$$\rho : E \xrightarrow{\cong} E_1 \times I$$

mit $\rho|_{X \times \{1\}} = \text{Id}_{E_1}$.

(ii) *Sei (X, A) ein Ko-Raum paar und $E \cong h^*E'$ für ein Vektorraumbündel $p' : E' \rightarrow Y$ und $h : X \times I \rightarrow Y$ mit $h_t(a) = h_0(a)$ für alle $t \in I$, $a \in A$ (d.h. h ist stationär auf A). Dann kann man die Abbildung ρ so wählen, daß sie den durch h induzierten Isomorphismus $E|_{A \times I} \xrightarrow{\cong} E_1|_A \times I$ fortsetzt.*

BEWEIS:

zu (i): Sei gemäß Lemma 2.10 $\{U_i\}_{i=1}^n$ eine offene Überdeckung von X , so daß $E|_{U_i \times I}$ trivial ist. Wähle Trivialisierungen $h_i : U_i \times I \times \mathbb{C}^n \xrightarrow{\cong} E|_{U_i \times I}$. Man findet eine Familie $\{\eta_i\}_{i=1}^n$ von stetigen Funktionen $X \rightarrow [0, 1]$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Träger(η_i) $\subset U_i$;
- (ii) $\max_{i=1,\dots,n} \eta_i(x) = 1$ für jedes $x \in X$.

Definiere nun Bündelabbildungen $(u_i, r_i) : E \rightarrow E$ durch

$$r_i(x, t) := (x, \max(\eta_i(x), t)), \quad (x, t) \in X \times I,$$

$u_i \equiv \text{Id}$ außerhalb von $E|_{U_i \times I}$ und

$$u_i(h_i(x, t, v)) := h_i(r_i(x, t), v), \quad (x, t, v) \in U_i \times I \times \mathbb{C}^n.$$

(Insbesondere ist u_i faserweise ein Isomorphismus.)

Nun definiere

$$(u, r) := (u_n \circ \dots \circ u_1, r_n \circ \dots \circ r_1) : E \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} E \\ \searrow \quad \quad \uparrow \\ \quad \quad \quad E_1 \end{array}$$

Es ist $r(x, t) = (x, 1)$ für alle $x \in X$ und $(u, r)|_{X \times \{1\}} = \text{Id}_{E_1}$. Die Abbildung $\rho : E \xrightarrow{(u,r) \times \text{Id}_I} E_1 \times I$ ist somit ein Isomorphismus von Vektorraumbündeln und $\rho|_{E \times \{1\}} = \text{Id}_{E_1}$.

zu (ii): Wähle eine offene Überdeckung $\{V_j\}_{j=1}^m$ von Y , so daß $E'|_{\overline{V}_j}$ trivial ist (\overline{V}_j die Abschließung von V_j), und definiere $\tilde{A}_j := h^{-1}(\overline{V}_j) \subset X$. Es ist

$$\tilde{A}_j \cap (A \times I) = \underbrace{(h_1^{-1}(\overline{V}_j) \cap A)}_{=: A_j} \times I,$$

da h konstant auf A ist. Es ist nun $E|_{A_j \times I}$ trivial. Nach Lemma 2.8(ii) findet man eine offene Umgebung $X \supset U_j \supset A_j$, so daß $E|_{U_j \times I}$ trivial ist. Nach evtl. Ergänzung um weitere in X offene Mengen U_k mit $U_k \cap A = \emptyset$ und $E|_{U_k \times I}$ trivial finden wir die Situation aus Teil (i) vor. Man sieht leicht, daß die Konstruktion in (i) auf jedem $E|_{A_j \times I} \xrightarrow{\cong} E|_{A_j} \times I$ genau den durch h induzierten Isomorphismus liefert. \square

Dieses - zugegebenermaßen sehr technische - Lemma läßt folgendes äußerst wichtige Korollar zu.

Korollar 2.12. *Sei $p : E \rightarrow Y$ ein Vektorraumbündel und $h : X \times I \rightarrow Y$ eine Homotopie. Dann gilt:*

- (i) $h_0^*E \cong h_1^*E$ als Vektorraumbündel über X ;

(ii) Ist (X, A) ein Ko-Raumpaar und h stationär auf A , dann kann der Isomorphismus so gewählt werden, daß er über A die Identität ist (d.h. $h_0^*(E|_A) = h_1^*(E|_A)$). □

Korollar 2.13. Sei (X, A) ein Ko-Raumpaar und $r : X \rightarrow A$ eine Retraktion (d.h. $r(a) = a$ für $a \in A$ und $i \circ r \simeq id_X(\text{rel } A)$). Dann gibt es für jedes Vektorraumbündel $E \rightarrow X$ eine Abbildung $(\bar{r}, r) : (E, X) \rightarrow (E|_A, A)$ von Vektorraumbündeln, welche auf $E|_A$ die Identität ist. □

Korollar 2.14. Sei (X, A) ein Ko-Raumpaar. Seien E und E' Vektorraumbündel über X und $f : E'|_A \rightarrow E|_A$ ein Isomorphismus von Vektorraumbündeln über A .

Ferner gebe es einen Isomorphismus $f' : E' \rightarrow E$ von Vektorraumbündeln über X und eine Homotopie von Bündelisomorphismen über A , d.h. eine stetige Abbildung $h : A \times I \rightarrow \text{Iso}(E'|_A, E|_A)$, so daß für jedes $t \in I$ die Restriktion $h_t : A \rightarrow \text{Iso}(E'|_A, E|_A)$ ein stetiger Schnitt ist und $h_0 = f'|_A$, $h_1 = f$ gilt.

Dann kann man f zu einem Isomorphismus $F : E' \rightarrow E$ von Vektorraumbündeln über X fortsetzen und h zu einer Homotopie $H : X \times I \rightarrow \text{Iso}(E', E)$ über X mit $H_0 = f'$, $H_1 = F$.

BEWEIS:

Da $A \hookrightarrow X$ eine Kofaserung ist, erhält man eine Retraktion $r : X \times I \rightarrow A \times I \cup X \times \{0\}$ wie folgt:

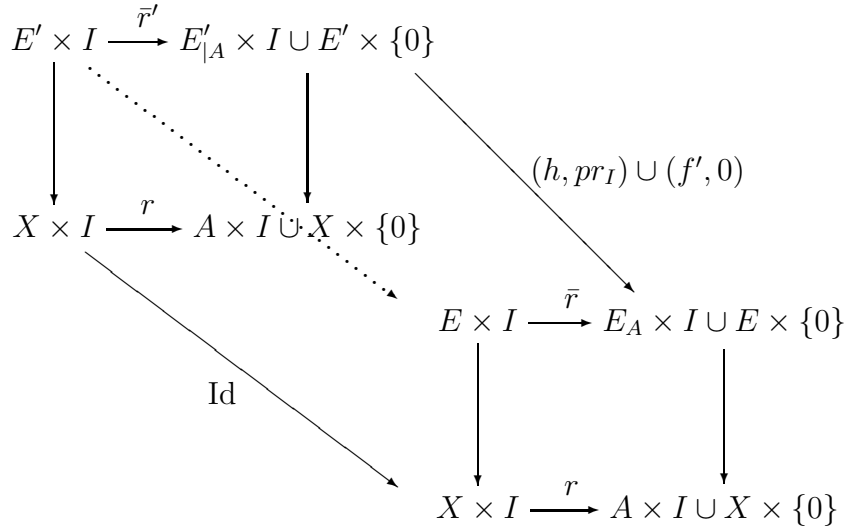
$$\begin{array}{ccc}
 A \times I \cup X \times \{0\} & \xrightarrow{\text{Id}} & A \times I \cup X \times \{0\} \xrightarrow{i} X \times I \\
 \downarrow & \nearrow r & \\
 X \times I & &
 \end{array}$$

Es sei $(r_X, r_I) := i \circ r : X \times I \rightarrow X \times I$. Die Homotopie $\text{Id}_{X \times I} \simeq i \circ r$ ist konkret gegeben durch $h : (X \times I) \times I \rightarrow X \times I$ mit

$$h(x, t, s) := (r_X(x, s \cdot t), s \cdot r_I(x, t) + (1 - s) \cdot t).$$

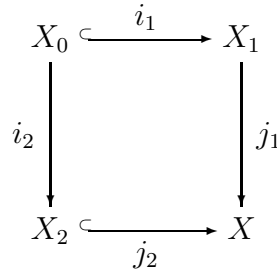
Nach Korollar 2.13 gibt es also Bündelabbildungen $(\bar{r}', r) : E' \times I \rightarrow (E'|_A \times I) \cup (E' \times \{0\})$ und $(\bar{r}, r) : E \times I \rightarrow (E|_A \times I) \cup (E \times \{0\})$, die beide über $(A \times I) \cup (X \times \{0\})$ die Identität sind. Nun verwenden wir die universelle Eigenschaft des Pull-Backs,

um eine Abbildung $\bar{H} : E' \times I \rightarrow E \times I$ zu definieren:



$H := pr_E \circ \bar{H}$ und $F := H_{|E' \times \{1\}}$ sind die gewünschten Abbildungen. □

Lemma 2.15 (Verkleben von Vektorraumbündeln). *Das folgende Diagramm sei ein Push-Out aus kompakten Hausdorffräumen:*



Seien $p_i : E_i \rightarrow X_i$ ($i = 1, 2$) Vektorraumbündel und $\varphi : i_1^*E_1 \rightarrow i_2^*E_2$ ein Isomorphismus über X_0 . Dann erhalten wir durch „Verkleben“ mit φ das Vektorraumbündel E über $X = X_1 \cup_{X_0} X_2$, definiert durch

$$E := E_1 \cup_{\varphi} E_2 := E_1 \amalg E_2 / \sim,$$

wobei \sim die folgende Äquivalenzrelation ist: $(x, e_1) \sim (x, \varphi(x)e_2)$ für $x \in X_0$, $e_1 \in E_1|_{X_0} = i_1^*E_1$. (Dabei fassen wir φ als stetigen Schnitt $\varphi : X_0 \rightarrow \text{Iso}(i_1^*E_1, i_2^*E_2)$ auf.)

BEWEIS:

Man erhält in natürlicher Weise eine Projektion $p : E_1 \cup_{\varphi} E_2 \rightarrow X$, und für alle $x \in X_1$ bzw. $x \in X_2$ erbt $p^{-1}(x)$ von E_1 bzw. E_2 eine Vektorraumstruktur. Es

bleibt zu zeigen, daß $E_1 \cup_\varphi E_2$ lokal trivial ist. Wegen der lokalen Trivialität von E_1 bzw. E_2 reduziert sich der Beweis dafür auf Punkte $x \in X_0$:

Da X_1 hausdorffsch ist, existiert eine abgeschlossene Umgebung V_1 von x in X_1 , so daß $E|_{V_1}$ trivial ist mit der Trivialisierung $\Theta_1 : E|_{V_1} \rightarrow V_1 \times \mathbb{C}^n$. Sei $\Theta_{1|V_1 \cap X_0}$ die Restriktion von Θ_1 auf $V_1 \cap X_0 \hookrightarrow X_1$ und $\Theta_{2|V_1 \cap X_0} := \Theta_{1|V_1 \cap X_0} \circ \varphi^{-1} : i_2^* E_{2|V_1 \cap X_0} \xrightarrow{\cong} (V_1 \cap X_0) \times \mathbb{C}^n$. Es ist $i_2(V_1 \cap X_0)$ kompakt, also abgeschlossen in X_2 . Nach 2.8(ii) findet man eine Umgebung V_2 von $i_2(V_1 \cap X_0)$ in X_2 , so daß die Fortsetzung $\Theta_2 : E_{2|V_2} \xrightarrow{\cong} V_2 \times \mathbb{C}^n$ von $\Theta_{2|V_1 \cap X_0}$ ein Vektorraumbündel-Isomorphismus ist. Nun erhält man offensichtlich einen wohldefinierten Isomorphismus $\Theta_1 \cup_\varphi \Theta_2 : E_1 \cup_\varphi E_{2|V_1 \cup V_2} \rightarrow (V_1 \cup V_2) \times \mathbb{C}^n$. \square

Lemma 2.16.

(i) Sei $X = X_1 \cup X_2$, $X_0 = X_1 \cap X_2$, und alle diese Räume seien kompakt und hausdorffsch. Ist E ein Vektorraumbündel über X , so gilt $E \cong E|_{X_1} \cup_{\text{Id}_{E|_{X_0}}} E|_{X_2}$.

(ii) Seien X, X_1, X_2, X_0 wie in Lemma 2.15. Für $i = 1, 2$ seien $\beta_i : E_i \rightarrow E'_i$ Isomorphismen von Vektorraumbündeln über X_i . Dann gilt

$$E_1 \cup_\varphi E_2 \cong E'_1 \cup_{\beta_2 \circ \varphi \circ \beta_1^{-1}} E'_2.$$

(iii) Das Verkleben von Vektorraumbündeln ist verträglich mit direkter Summe, Tensorprodukt, Dualisieren ...

(iv) Die Isomorphieklasse von $E_1 \cup_\varphi E_2$ hängt nur von der Homotopieklasse der Abbildung $\varphi : i_1^* E_1 \rightarrow i_2^* E_2$ ab.

BEWEIS:

zu (iv): Sei h eine Homotopie zwischen zwei Isomorphismen $\varphi_0, \varphi_1 : i_1^* E_1 \rightarrow i_2^* E_2$. Man kann h als Schnitt

$$h : X_0 \times I \longrightarrow \text{Iso}(\underbrace{i_1^* E_1 \times I}_{=\pi^*(i_1^* E_1)}, \underbrace{i_2^* E_2 \times I}_{=\pi^*(i_2^* E_2)})$$

auffassen, wobei $\pi : X \times I \rightarrow X$ die kanonische Projektion (bzw. die entsprechende Restriktion davon) ist. Also ist h ein Isomorphismus von Vektorraumbündeln

$$h : (i_1 \times \text{Id})^* \pi^* E_1 \longrightarrow (i_2 \times \text{Id})^* \pi^* E_2.$$

Da auch

$$\begin{array}{ccc} X_0 \times I & \xrightarrow{i_1 \times \text{Id}} & X_1 \times I \\ \downarrow i_2 \times \text{Id} & & \downarrow j_1 \times \text{Id} \\ X_2 \times I & \xrightarrow{j_2 \times \text{Id}} & X \times I \end{array}$$

ein Push-Out ist, kann man gemäß Lemma 2.15 das Bündel $\pi^*E_1 \cup_h \pi^*E_2$ bilden. Sei nun $f_t : X \hookrightarrow X \times I$, $x \mapsto (x, t)$. Da $f_0 \simeq f_1$, gilt nach Korollar 2.12(i)

$$E_1 \cup_{\varphi_0} E_2 = f_0^*(\pi^*E_1 \cup_h \pi^*E_2) \cong f_1^*(\pi^*E_1 \cup_h \pi^*E_2) = E_1 \cup_{\varphi_1} E_2. \quad \square$$

Kapitel 3

K -Theorie und kohomologische Eigenschaften

Definition 3.1. Sei (X, A) ein Ko-Raumpaar.

- (i) Ein *Tripel* (E_1, f, E_0) über (X, A) besteht aus zwei Vektorraumbündeln E_0, E_1 über X und einem Isomorphismus $f : E_{1|A} \rightarrow E_{0|A}$ von Vektorraumbündeln über A .

$$\begin{array}{ccc} E_{1|A} & \xrightarrow{f} & E_{0|A} \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_0 \\ & A & \end{array}$$

- (ii) Ein *Isomorphismus* (g_1, g_0) von *Tripeln* (E_1, f, E_0) und (E'_1, f', E'_0) über (X, A) ist ein Paar von Isomorphismen $g_1 : E_1 \rightarrow E'_1$, $g_0 : E_0 \rightarrow E'_0$ von Vektorraumbündeln über X , so daß bei Einschränkung auf A das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} E_{1|A} & \xrightarrow{g_{1|A}} & E'_{1|A} \\ \downarrow f & & \downarrow f' \\ E_{0|A} & \xrightarrow{g_{0|A}} & E'_{0|A} \end{array}$$

- (iii) Ein Tripel heißt *elementar*, wenn es von der Gestalt (E, Id, E) ist.
- (iv) Zwei Tripel heißen *stabil isomorph*, wenn man nach direkter Summenbildung mit (möglicherweise auch verschiedenen) elementaren Tripeln einen Isomorphismus angeben kann:

$$(E_1 \oplus E, f \oplus \text{Id}_E, E_0 \oplus E) \cong (E'_1 \oplus E', f' \oplus \text{Id}_{E'}, E'_0 \oplus E')$$

„Stabil isomorph“ definiert eine Äquivalenzrelation auf der Gesamtheit aller Tripel über (X, A) . Wir bezeichnen die Äquivalenzklasse von (E_1, f, E_0) mit $[E_1, f, E_0]$.

Bemerkung 3.2. Ein Tripel (E_1, f, E_0) ist genau dann stabil isomorph zum Null-Tripel $(0, \text{Id}, 0)$, wenn es ein Vektorraumbündel η über X gibt, so daß man den Isomorphismus

$$(f \oplus \text{Id})|_A : (E_1 \oplus \eta)|_A \rightarrow (E_0 \oplus \eta)|_A$$

von Vektorraumbündeln über A zu einem Isomorphismus

$$E_1 \oplus \eta \longrightarrow E_0 \oplus \eta$$

von Vektorraumbündeln über X fortsetzen kann. Der Beweis ist eine einfache Übungsaufgabe.

Lemma 3.3.

(i) Seien (E_0, f, E_1) , (E_1, g, E_2) Tripel über (X, A) . Dann sind die Tripel

$$(E_0, g \circ f, E_2) \text{ und } (E_0 \oplus E_1, f \oplus g, E_1 \oplus E_2)$$

stabil isomorph.

(ii) Seien (E_0, f, E_1) und (E_0, g, E_1) Tripel über (X, A) . Es gebe eine stetige Homotopie $h : A \times I \rightarrow \text{Iso}(E_0|_A, E_1|_A)$ über Id_A mit $h_0 = f$, $h_1 = g$.

$$\begin{array}{ccc} E_0|_A & \xrightarrow{h_t} & E_1|_A \\ & \searrow & \swarrow \\ & A & \end{array}$$

Dann sind die beiden Tripel stabil isomorph.

BEWEIS:

zu (i): Man rechnet leicht nach, daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} (E_1 \oplus E_0)|_A & \xrightarrow[\begin{pmatrix} \text{Id} & f \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix}]{\cong} & (E_1 \oplus E_0)|_A & & \\ \downarrow \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ 0 & g \circ f \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} & & \\ (E_1 \oplus E_2)|_A & \xleftarrow[\begin{pmatrix} 0 & -\text{Id} \\ \text{Id} & 0 \end{pmatrix}]{\cong} & (E_2 \oplus E_1)|_A & \xleftarrow[\begin{pmatrix} \text{Id} & g \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix}]{\cong} & (E_2 \oplus E_1)|_A & \xleftarrow[\begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ -g^{-1} & \text{Id} \end{pmatrix}]{\cong} & (E_2 \oplus E_1)|_A \end{array}$$

Wir können f , g und $-g^{-1}$ nach 2.8(ii) zu Abbildungen von Vektorraumbündeln über X fortsetzen. Die entsprechenden Fortsetzungen der Dreiecksmatrizen

$\begin{pmatrix} \text{Id} & f \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \text{Id} & g \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ -g^{-1} & \text{Id} \end{pmatrix}$ sind dann offenbar Isomorphismen von Vektorraumbündeln über X . Ebenso kann man $\begin{pmatrix} 0 & -\text{Id} \\ -\text{Id} & 0 \end{pmatrix}$ auf ganz X fortsetzen.

zu (ii): Wendet man (i) auf (E_0, f, E_1) , (E_1, g^{-1}, E_0) an, so liefert das

$$(E_0 \oplus E_1, f \oplus g^{-1}, E_1 \oplus E_0) \cong_{\text{stabil}} (E_0, g^{-1} \circ f, E_0).$$

Es gilt außerdem wegen Bemerkung 3.2

$$(E_0, g^{-1} \circ f, E_0) \cong_{\text{stabil}} (0, \text{Id}, 0),$$

da man nach Korollar 2.14 mit Id auch $g^{-1} \circ f \simeq \text{Id}$ zu einem Isomorphismus über ganz X fortsetzen kann. Man hat also

$$(E_0 \oplus E_1, f \oplus g^{-1}, E_1 \oplus E_0) \cong_{\text{stabil}} (0, \text{Id}, 0).$$

Addiert man nun auf beiden Seiten als direkten Summanden jeweils das Tripel (E_0, g, E_1) und wendet noch einmal Teil (i) an, so folgt die Behauptung. \square

Definition 3.4 (Produkt von Ko-Raumpaaren). Seien $(X, A), (Y, B)$ Ko-Raumpaare. Definiere $(X, A) \times (Y, B) := (X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$. (Dieses ist wieder ein Ko-Raumpaar.)

Definition 3.5 (Topologische K -Theorie von (X, A)).

- Für ein Ko-Raumpaar (X, A) bezeichne $K(X, A)$ die Menge der stabilen Isomorphieklassen von Tripeln über (X, A) . (Ist $A = \emptyset$, so handelt es sich um Isomorphieklassen von „Dupeln“ $[E_1, E_0]$, da dann keine Abbildung über A vorkommt.)
- Diese Menge bekommt die Struktur einer abelschen Gruppe durch die Operation direkte Summe. (Nullelement: $[0, \text{Id}, 0] =: 0$; Inverses: $-[E_1, f, E_0] = [E_0, f^{-1}, E_1]$ wegen 3.3(i).)
- Für $n \geq 0$ definiere nun die $(-n)$ -te K -Gruppe von (X, A) als

$$K^{-n}(X, A) := K((X, A) \times (I, \partial I)^n).$$

Dabei bezeichnen wir mit $(I, \partial I)^n$ das n -fache Produkt des Ko-Raumpaars $(I, \partial I)$ mit sich selbst.

- Wir schreiben

$$K^{-n}(X) := K^{-n}(X, \emptyset).$$

- Die Pull-Back-Konstruktion für Vektorraumbündel macht $K^{-n}(-, -)$ zu kontravarianten Funktoren von der Kategorie der Ko-Raumpaare in die Kategorie der abelschen Gruppen.

Bemerkung 3.6. Die auf den ersten Blick vielleicht willkürlich erscheinende Definition von $K^{-n}(X, A)$ leuchtet ein, wenn man sich überlegt, daß die Beziehung

$$H^k((X, A) \times (I, \partial I)^n) \cong H^{k-n}(X, A)$$

auch für gewöhnliche singuläre Kohomologie mit \mathbb{Z} -Koeffizienten gilt. Es ist nämlich (Poincaré-Dualität)

$$H^j(I, \partial I) \cong H_{1-j}(I) = \begin{cases} \mathbb{Z} & : j = 1; \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases}$$

Also gilt (Künneth-Theorem für Kohomologie; der Isomorphismus gilt, da $H^*(I, \partial I)$ frei ist)

$$H^k((X, A) \times (I, \partial I)) \cong \bigoplus_{i+j=k} H^i(X, A) \otimes_{\mathbb{Z}} H^j(I, \partial I) \cong H^{k-1}(X, A).$$

Bemerkung 3.7 (Grothendieck-Konstruktion). In den meisten Büchern über Topologische K -Theorie wird für einen kompakten Raum X die abelsche Gruppe $K(X)$ folgendermaßen definiert:

Sei $Vect(X)$ die Menge der Isomorphieklassen von Vektorraumbündeln über X . $(Vect(X), \oplus)$ ist eine abelsche Halbgruppe. Die sogenannte *Grothendieck-Konstruktion* ist ein Verfahren, mit dem sich jeder abelschen Halbgruppe A eine abelsche Gruppe $K(A)$ mit der folgenden universellen Eigenschaft zuordnen läßt: Es gibt einen Halbgruppenhomomorphismus $\alpha : A \rightarrow K(A)$, so daß für jeden Halbgruppenhomomorphismus $\gamma : A \rightarrow G$ in irgendeine Gruppe G genau ein Gruppenhomomorphismus $\kappa : K(A) \rightarrow G$ mit $\gamma = \kappa \circ \alpha$ existiert.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & K(A) \\ & \searrow \gamma & \swarrow \kappa \\ & & G \end{array}$$

Durch diese Eigenschaft ist $K(A)$ bis auf Isomorphie eindeutig festgelegt (warum?). Daß $K(A)$ existiert, überlassen wir dem Leser als Aufgabe: Definiere $K(A)$ (in Anlehnung an unsere Definition von $K(X)$) als Teilmenge von $A \times A$ mit gewissen Relationen. Dann ist in diesem Sinne $K(X) := K(Vect(X))$. Wie sieht die Abbildung α aus?

Unsere Definition hat gegenüber der Grothendieck-Konstruktion den Vorteil, daß man mit der Tripel-Schreibweise auch die relative K -Theorie über einem Raum-paar (X, A) sofort (und auf vergleichsweise einfache Weise) definieren kann.

Beispiel 3.8. Wir betrachten den Fall $X = \{*\}$. Über einem Punkt gibt es nur die trivialen Vektorraumbündel $n := \{*\} \times \mathbb{C}^n$ ($n \in \mathbb{N}_0$). Es folgt

$$K^0(\{*\}) \cong \mathbb{Z}$$

mit dem Isomorphismus

$$[n, m] \longmapsto m - n$$

(Wohldefiniertheit nachprüfen!). Die Umkehrabbildung ist durch die Vorschrift $n \mapsto [0, n]$ gegeben.

Außerdem gilt

$$K^{-1}(\{*\}) = K(I, \partial I) = 0.$$

Denn sei $[E_1, f, E_0] \in K(I, \partial I)$. Es entspricht f einer Abbildung $S^0 = \partial I \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$. Da $GL(n, \mathbb{C})$ wegweise zusammenhängend ist (siehe Aufgabe 3.9), ist f bis auf Homotopie über ganz I fortsetzbar. Wegen Bemerkung 3.2 ist also $[E_1, f, E_0] = 0$.

Aufgabe 3.9. Zeige, daß $GL(n, \mathbb{C})$ wegweise zusammenhängend ist. (Tip: Jede Matrix über \mathbb{C} läßt sich auf Dreiecksgestalt bringen.) Zeige außerdem, daß $GL(n, \mathbb{R})$ in zwei Wegekomponten zerfällt. (Tip: Vermöge Polarzerlegung läßt sich $A \in GL(n, \mathbb{R})$ in der Form $A = U \cdot H$ schreiben mit positiv definiten Matrix $H \in GL(n, \mathbb{R})$ und orthogonaler Matrix $U \in O(n)$. Zeige, daß $O(n)$ genau zwei Wegekomponten hat, da jede orthogonale Matrix zu einer direkten Summe von Spiegelungen und zweidimensionalen Drehungen konjugiert ist.)

Aufgabe 3.10. Man kann K -Theorie auch reell definieren, d.h. man betrachtet \mathbb{R} -Vektorraumbündel anstelle von \mathbb{C} -Vektorraumbündeln. Alle Definitionen bleiben wie gehabt. Man spricht dann meist von KO -Theorie. Berechne unter Verwendung der vorigen Aufgabe $KO^0(\{*\})$ und $KO^1(\{*\})$.

Satz 3.11 (Homotopieinvarianz). Seien $f_0, f_1 : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ homotope Abbildungen von Ko -Raumpaaren. Dann gilt

$$f_0^* = f_1^* : K^{-n}(Y, B) \longrightarrow K^{-n}(X, A) \quad (n \geq 0).$$

Insbesondere ist die K -Theorie eines Ko -Raumpaares eine Invariante des Homotopietyps.

BEWEIS:

Es genügt, den Fall $n = 0$ zu betrachten. Für $k = 0, 1$ sei $r_k : X \times I \rightarrow X \times I$, $(x, t) \mapsto (x, k)$. Ist (E_1, f, E_0) ein Tripel über (Y, B) , so ist

$$f_k^*(E_1, f, E_0) \times I = r_k^* \underbrace{h^*(E_1, f, E_0)}_{\text{Trp. üb. } (X \times I, A \times I)}, \quad k = 0, 1.$$

Somit genügt es zu zeigen: Ist (E_1, f, E_0) ein Tripel über $(X \times I, A \times I)$, so ist es stabil isomorph zu $r_1^*(E_1, f, E_0) =: (r_1^*E_1, r_1^*f, r_1^*E_0)$. Nach Satz 2.11(i) gibt es für $i = 0, 1$ Isomorphismen von Vektorraumbündeln über $X \times I$

$$\rho_i : E_i \longrightarrow E_{i|X \times \{1\}} \times I = r_1^*E_i$$

mit $\rho_{i|X \times \{1\}} = \text{Id}$. Also folgt

$$(E_1, f, E_0) \cong \left(\underbrace{r_1^*E_1}_{=E_{1|X \times \{1\}} \times I}, \rho_{0|A \times I} \circ f \circ (\rho_{1|A \times I})^{-1}, \underbrace{r_1^*E_0}_{=E_{0|X \times \{1\}} \times I} \right).$$

Es ist $(\rho_{0|A \times I} \circ f \circ (\rho_{1|A \times I})^{-1})|_{A \times \{1\}} = f|_{A \times \{1\}} = r_1^*f|_{A \times \{1\}}$.

Bleibt zu zeigen: Zwei Tripel $(r_1^*E_1, f, r_1^*E_0)$, $(r_1^*E_1, \tilde{f}, r_1^*E_0)$ mit $f|_{A \times \{1\}} = \tilde{f}|_{A \times \{1\}}$ sind stabil isomorph:

f und \tilde{f} entsprechen Abbildungen $I \rightarrow \text{ISO}(E_{1|A \times \{1\}}, E_{0|A \times \{1\}})$ mit $f(1) = \tilde{f}(1)$. Eine Homotopie von f nach \tilde{f} ergibt sich also vermöge $f \simeq (\equiv f(1)) = (\equiv \tilde{f}(1)) \simeq \tilde{f}$. Wegen Lemma 3.3(ii) sind also $(r_1^*E_1, f, r_1^*E_0)$ und $(r_1^*E_1, \tilde{f}, r_1^*E_0)$ stabil isomorph. \square

Bemerkung 3.12. Sei (X, A) ein Ko-Raumpaar. Zu jedem Vektorraumbündel η über A existiert ein Vektorraumbündel ξ über X , so daß η ein direkter Summand von $\xi|_A$ ist. (Übungsaufgabe. Zeige dazu: Ist F ein Vektorraumbündel über dem kompakten Raum X , so existiert ein Vektorraumbündel F' , für das $F \oplus F'$ trivial ist. Tip: Endlicher (Bündel-)Atlas mit untergeordneter Zerlegung der Eins. Konstruiere damit eine Einbettung von F in ein triviales Bündel über X .)

Satz 3.13 (Ausschneidung). Sei das folgende Diagramm ein Push-Out und i_1 eine Kofaserung.

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{i_1} & X_1 \\ \downarrow i_2 & & \downarrow j_1 \\ X_2 & \xrightarrow{j_2} & X \end{array}$$

Dann ist j_2 auch eine Kofaserung, und die Abbildung

$$j_1^* : K^{-n}(X, X_2) \longrightarrow K^{-n}(X_1, X_0)$$

ist für $n \geq 0$ ein Isomorphismus.

BEWEIS:

Eine Abbildung $X_2 \times I \cup X \times \{0\} \rightarrow Y$ induziert eine Abbildung $X_0 \times I \cup X_1 \times \{0\} \rightarrow Y$, und da i_1 Kofaserung ist, auch eine Abbildung $X_1 \times I \rightarrow Y$. Mit der universellen Eigenschaft des Push-Outs

$$\begin{array}{ccc}
 X_0 \times I & \xrightarrow{i_1 \times \text{Id}} & X_1 \times I \\
 \downarrow i_2 \times \text{Id} & & \downarrow j_1 \times \text{Id} \\
 X_2 \times I & \xrightarrow{j_2 \times \text{Id}} & X \times I \\
 & \searrow & \dots \searrow \\
 & & Y
 \end{array}$$

kann man die gewünschte Fortsetzung $X \times I \rightarrow Y$ konstruieren, also ist j_2 eine Kofaserung.

Andererseits ist für jedes $n > 0$ das folgende Diagramm ein Push-Out und i'_1 eine Kofaserung:

$$\begin{array}{ccc}
 X_0 \times I^n \cup X_1 \times \partial I^n & \xrightarrow{i'_1} & X_1 \times I^n \\
 \downarrow i'_2 & & \downarrow j'_1 \\
 X_2 \times I^n \cup X \times \partial I^n & \xrightarrow{j'_2} & X \times I^n
 \end{array}$$

Also genügt es, Ausschneidung im Falle $n = 0$ zu beweisen.

Injektivität von j_1^ :* Sei $[E_1, f, E_0] \in \text{Kern}(j_1^*)$ Daraus folgt $0 = [j_1^* E_1, i_2^* f, j_1^* E_0]$ in $K^0(X_1, X_0)$. Nach Bemerkung 3.2 existiert somit ein Vektorraumbündel F über X_1 , so daß man den Isomorphismus

$$i_2^* f \oplus \text{Id}_{i_1^* F} : i_1^* j_1^* E_1 \oplus i_1^* F \xrightarrow{\cong} i_1^* j_1^* E_0 \oplus i_1^* F$$

von Vektorraumbündeln über X_0 zu einem Isomorphismus über ganz X_1 fortsetzen kann.

Nach Bemerkung 3.12 gibt es ein Vektorraumbündel F' über X mit $j_1^* F' = F \oplus \tilde{F}$ für ein weiteres Vektorraumbündel \tilde{F} über X_1 . Es ist

$$[j_1^* E_1, i_2^* f, j_1^* E_0] = [j_1^*(E_1 \oplus F'), i_2^*(f \oplus \text{Id}_{F'|_{X_2}}), j_1^*(E_0 \oplus F')].$$

Daher kann man o.B.d.A. annehmen, daß sich $i_2^* f$ selbst zu einem Isomorphismus $g : j_1^* E_1 \rightarrow j_1^* E_0$ von Vektorraumbündeln über X_1 fortsetzen läßt.

Nun kann man $f : E_1|_{X_2} = j_2^*E_1 \rightarrow E_0|_{X_2} = j_2^*E_0$ wie folgt zu einem Isomorphismus von Vektorraumbündeln $E_1 \rightarrow E_0$ über ganz X fortsetzen (konstruiere Abbildungen zwischen Push-Outs):

$$\begin{array}{ccccc}
 i_2^*j_2^*E_1 & \longrightarrow & j_1^*E_1 & & \\
 \downarrow & & \downarrow & \searrow g & \\
 j_2^*E_1 & \longrightarrow & E_1 & \xrightarrow{\cong} & j_1^*E_0 \\
 & \searrow f \cong & & \swarrow & \downarrow \\
 & & & & j_2^*E_0 \longrightarrow E_0 \\
 & & & \swarrow & \uparrow \\
 & & & i_2^*j_2^*E_0 & \longrightarrow j_1^*E_0
 \end{array}$$

Mit Bemerkung 3.2 folgt $[E_1, f, E_0] = 0 \in K^0(X, X_2)$.

Surjektivität von j_1^ :* Sei $[E_1, f, E_0] \in K^0(X_1, X_0)$. Nach Bemerkung 3.12 gibt es Vektorraumbündel F über X_1 und E'_0 über X mit einem Isomorphismus $\psi : E_0 \oplus F \xrightarrow{\cong} j_1^*E'_0$ von Vektorraumbündeln über X_1 . Sei nun α der folgende Isomorphismus (über X_0):

$$\alpha : (E_1 \oplus F)|_{X_0} \xrightarrow[\cong]{f \oplus \text{Id}} (E_0 \oplus F)|_{X_0} \xrightarrow[\cong]{\psi|_{X_0}} j_1^*E'_0|_{X_0}$$

Wir erhalten das Vektorraumbündel E'_1 über X durch Verkleben

$$E'_1 := (E'_0|_{X_2}) \cup_{\alpha} (E_1 \oplus F).$$

Nun sei $f' : E'_1|_{X_2} \rightarrow E'_0|_{X_2}$ die Identität. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 j_1^*[E'_1, f', E'_0] &= [E'_1|_{X_1}, f'|_{X_0}, E'_0|_{X_1}] \\
 &= [E_1 \oplus F, f \oplus \text{Id}, E_0 \oplus F] \\
 &= [E_1, f, E_0] \oplus \underbrace{[F, \text{Id}, F]}_{=0 \text{ in } K^0(X_1, X_0)} \\
 &= [E_1, f, E_0]. \quad \square
 \end{aligned}$$

Unter einem *Raumtripel* (X, B, A) verstehen wir einen kompakten Hausdorffraum X mit abgeschlossenen Teilräumen $B \supset A$, so daß die Inklusionen $B \hookrightarrow X$, $A \hookrightarrow B$ und damit auch $A \hookrightarrow X$ Kofaserungen sind. Für ein Raumtripel wollen wir im folgenden eine lange exakte K -Gruppensequenz konstruieren:

Satz 3.14 (Exaktheit). *Sei (X, B, A) ein Raumtripel. Dann ist die folgende Sequenz von K -Gruppen natürlich und exakt:*

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \rightarrow & K^{-n}(X, B) & \xrightarrow{i^*} & K^{-n}(X, A) & \xrightarrow{j^*} & K^{-n}(B, A) & \xrightarrow{\delta^{-n}} & \\
 & & K^{-n+1}(X, B) & \xrightarrow{i^*} & \dots & \xrightarrow{\delta^{-1}} & K^0(X, B) & \xrightarrow{i^*} & K^0(X, A) & \xrightarrow{j^*} & K^0(B, A)
 \end{array}$$

Dabei sind $i : (X, A) \hookrightarrow (X, B)$, $j : (B, A) \hookrightarrow (X, A)$ die Inklusionen. Die Abbildung $\delta^{-1} : K^0((B, A) \times (I, \partial I)) = K^{-1}(B, A) \rightarrow K^0(X, B)$ definieren wir als die Abbildung, die folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccc}
 K^0(X \times \{0\} \cup B \times I, X \times \{0\} \cup A \times I \cup B \times \{1\}) & \xrightarrow[\cong]{i_1^*} & K^0(B \times I, A \times I \cup B \times \partial I) \\
 \downarrow i_2^* & & \vdots \\
 & & \delta^{-1} \\
 & & \vdots \\
 K^0(X \times \{0\} \cup B \times I, A \times I \cup B \times \{1\}) & \xleftarrow[\cong]{pr_X^*} & K^0(X, B)
 \end{array}$$

Dabei seien i_1, i_2 die Inklusionen und pr_X die Projektion $X \times I \rightarrow X$. Der obere horizontale Pfeil des Diagramms ist wegen Ausschneidung (Satz 3.13) ein Isomorphismus. pr_X^* ist ein Isomorphismus, weil $pr_X : (X \times \{0\} \cup B \times I, A \times I \cup B \times \{1\}) \rightarrow (X, B)$ eine Homotopieäquivalenz (von Raumpaaren) ist (Satz 3.11). Eine Homotopieinverse konstruiert man mit Hilfe der Kofaserungseigenschaft von (X, B) : Danach existiert eine Abbildung $h : X \times I \rightarrow X \times \{0\} \cup B \times I$ mit $h|_{X \times \{0\} \cup B \times I} = \text{Id}$. Man kann zeigen, daß $h_1 : (X, B) \rightarrow (X \times \{0\} \cup B \times I, A \times I \cup B \times \{1\})$ die gewünschte Homotopieinverse ist.

Nun definiert man δ^{-n} für das Tripel (X, B, A) als die Abbildung, die folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccc}
 & & \delta^{-n} \\
 & & K^{-n}(B, A) \cdots \cdots \cdots \rightarrow K^{-n+1}(X, B) \\
 & \parallel & \parallel \\
 & K^{-1}(B \times I^{n-1}, A \times I^{n-1} \cup B \times \partial I^{n-1}) & K^0(X \times I^{n-1}, B \times I^{n-1} \cup X \times \partial I^{n-1}) \\
 & \uparrow i_3^* \cong & \nearrow \delta^{-1} \\
 K^{-1}(B \times I^{n-1} \cup X \times \partial I^{n-1}, A \times I^{n-1} \cup X \times \partial I^{n-1}) & &
 \end{array}$$

BEWEIS:

- *Exaktheit an der Stelle $K^0(X, A)$* : Es ist offenbar $j^* \circ i^* = 0$, denn für $[E_1, f, E_0] \in K^0(X, B)$ ist $f : E_{1|B} \rightarrow E_{0|B}$ ein Isomorphismus, also kann man bei $(i \circ j)^*[E_1, f, E_0] = [E_{1|B}, f|_A, E_{0|B}]$ die Abbildung $f|_A$ zu einem Isomorphismus über ganz B fortsetzen. Somit gilt $\text{Bild}(i^*) \subset \text{Kern}(j^*)$. Umgekehrt: Sei $[E_1, f, E_0] \in K^0(X, A)$ mit $j^*[E_1, f, E_0] = 0 \in K^0(B, A)$. Nach Bemerkung 3.2 gibt es ein Vektorraumbündel F über B , so daß sich $f \oplus \text{Id}_F : j^*E_1 \oplus F \xrightarrow{\cong} j^*E_0 \oplus F$ zu einem Isomorphismus g über ganz B fortsetzen läßt. Wegen Bemerkung 3.12 kann man $F = j^*F'$ für ein Vektorraumbündel F' über X annehmen. Es ist $[E_1, f, E_0] = [E_1 \oplus F', f \oplus \text{Id}_{F'}, E_0 \oplus F'] = i^*[E_1 \oplus F', g, E_0 \oplus F'] \in \text{Bild}(i^*)$.

- *Exaktheit an der Stelle $K^0(X, B)$* : Dies spielen wir auf den ersten Fall zurück. Das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
K^0(X \times \{0\} \cup B \times I, X \times \{0\} \cup A \times I \cup B \times \{1\}) & \xrightarrow{i_1^*} & K^{-1}(B, A) \\
\downarrow i_2^* & & \downarrow \delta^{-1} \\
K^0(X \times \{0\} \cup B \times I, A \times I \cup B \times \{1\}) & \xleftarrow{pr_X^*} & K^0(X, B) \\
\downarrow i_4^* & & \downarrow i^* \\
K^0(X \times \{0\} \cup A \times I \cup B \times \{1\}, A \times I \cup B \times \{1\}) & \xrightarrow{i_5^*} & K^0(X, A)
\end{array}$$

i_1^* und i_5^* sind Ausschneidungsisomorphismen, pr_X^* ist ein Isomorphismus, weil pr_X eine Homotopieäquivalenz von Ko-Raumpaaren ist. Die linke Spalte des Diagramms ist nach dem ersten Fall, angewandt auf das Tripel $(X \times \{0\} \cup B \times I, X \times \{0\} \cup A \times I \cup B \times \{1\}, A \times I \cup B \times \{1\})$, exakt. Mit einem ähnlichen Argument beweist man die Exaktheit an der Stelle $K^{-1}(B, A) = K^0((B, A) \times (I, \partial I))$.

- *Exaktheit der Teilstücke für $n \geq 1$* : Dazu betrachtet man das Tripel

$$(X \times I^n, B \times I^n \cup X \times \partial I^n, A \times I^n \cup X \times \partial I^n).$$

Nach dem, was man schon gezeigt hat, ist die linke Spalte im folgenden Diagramm exakt, und mit Hilfe des Ausschneidungs-Isomorphismus' (Satz 3.13) schließt man daraus auf die Exaktheit der rechten Spalte.

$$\begin{array}{ccc}
K^0((X, A) \times (I, \partial I)^{n+1}) & \xlongequal{\quad} & K^{-n-1}(X, A) \\
\downarrow j^* & & \downarrow j^* \\
K^0((B \times I^n \cup X \times \partial I^n, A \times I^n \cup X \times \partial I^n) \times (I, \partial I)) & \xrightarrow{i_3^*} & K^{-n-1}(B, A) \\
\downarrow \delta^{-1} & \cong & \downarrow \delta^{-n-1} \\
K^0((X, B) \times (I, \partial I)^n) & \xlongequal{\quad} & K^{-n}(X, B) \\
\downarrow i^* & & \downarrow i^* \\
K^0((X, A) \times (I, \partial I)^n) & \xlongequal{\quad} & K^{-n}(X, A) \\
\downarrow j^* & & \downarrow j^* \\
K^0(B \times I^n \cup X \times \partial I^n, A \times I^n \cup X \times \partial I^n) & \xrightarrow{i_3^*} & K^{-n}(B, A) \\
& \cong &
\end{array}$$

□

Aus der Kombination von Ausschneidung und langer exakter Sequenz des Paares ergibt sich - wie bei anderen verallgemeinerten (Ko-)Homologietheorien - die Mayer-Vietoris-Sequenz:

Korollar 3.15 (Mayer-Vietoris-Sequenz). *Das folgende Diagramm sei ein Push-Out von Ko-Raumpaaren:*

$$\begin{array}{ccc}
 (X_0, Y_0) & \xhookrightarrow{i_1} & (X_1, Y_1) \\
 \downarrow i_2 & & \downarrow j_1 \\
 (X_2, Y_2) & \xhookrightarrow{j_2} & (X, Y)
 \end{array}$$

Es seien entweder

- (i) i_1 und $i_{1|Y_0} : Y_0 \hookrightarrow Y_1$ Kofaserungen oder folgende Situation gegeben:
- (ii) X_0, X_1, X_2 abgeschlossen in X , $X_0 = X_1 \cap X_2$, $X = \text{Int}_X(X_1) \cup \text{Int}_X(X_2)$. (Man nennt dann (X, X_1, X_2) eine excisive Triade.) Ebenso sei (Y, Y_1, Y_2) eine excisive Triade.

In beiden Fällen gibt es eine natürliche exakte Sequenz von K -Gruppen, die sogenannte Mayer-Vietoris-Sequenz

$$\begin{aligned}
 \dots &\xrightarrow{\partial^{-n-1}} K^{-n}(X, Y) \xrightarrow{j_1^* \oplus j_2^*} K^{-n}(X_1, Y_1) \oplus K^{-n}(X_2, Y_2) \xrightarrow{i_1^* - i_2^*} K^{-n}(X_0, Y_0) \xrightarrow{\partial^{-n}} \\
 &\dots \xrightarrow{\partial^{-1}} K^0(X, Y) \xrightarrow{j_1^* \oplus j_2^*} K^0(X_1, Y_1) \oplus K^0(X_2, Y_2) \xrightarrow{i_1^* - i_2^*} K^0(X_0, Y_0).
 \end{aligned}$$

BEWEIS:

Wir geben hier nur den Beweis im Falle $Y = \emptyset$ an. Die relative Version des Satzes kann man sehr ähnlich beweisen. Bei der Konstruktion des Randoperators ∂^{-n} verwendet man dann statt der Paarsequenzen zu (X_1, X_0) , (X, X_2) entsprechend Tripelsequenzen zu $(X_1, X_0 \cup Y_1, Y_1)$, $(X, X_2 \cup Y_1, Y)$.

zu Fall (i): Wir definieren zunächst den $(-n)$ -ten Randoperator ∂^{-n} , indem wir die langen exakten Sequenzen zu den Paaren (X_1, X_0) und (X, X_2) mittels Ausschneidung geeignet „aneinandersetzen“:

$$\begin{array}{ccccccc}
 K^{-n}(X_1) & \xrightarrow{i_1^*} & K^{-n}(X_0) & \xrightarrow{\delta^{-n}} & K^{-n+1}(X_1, X_0) & \longrightarrow & K^{-n+1}(X_1) \\
 & & \uparrow i_2^* & & \uparrow j_1^* & \cong (\text{Ausschn.}) & \uparrow j_1^* \\
 & & & & & \searrow & \\
 K^{-n}(X_2) & \xrightarrow{\delta^{-n}} & K^{-n+1}(X, X_2) & \xrightarrow{k^*} & K^{-n+1}(X) & \xrightarrow{j_2^*} & K^{-n+1}(X_2)
 \end{array}$$

Dabei sei k die Inklusion. Definiere also

$$\partial^{-n} := k^* \circ (j_1^*)^{-1} \circ \delta^{-n} : K^{-n}(X_0) \longrightarrow K^{-n+1}(X).$$

Durch eine einfache Diagramm-Jagd zeigt man (unter Verwendung von Satz 3.14), daß die so konstruierte Mayer-Vietoris-Sequenz exakt ist.

zu Fall (ii): Hier ist die Inklusion $X_0 \hookrightarrow X_1$ i.a. keine Kofaserung mehr. Daher betrachten wir stattdessen zunächst die Räume

$$\begin{aligned} X' &:= X_1 \times \{0\} \cup X_0 \times I \cup X_2 \times \{1\} \subset X \times I; \\ X'_1 &:= X_1 \times \{0\} \cup X_0 \times [0, \tfrac{1}{2}]; \\ X'_2 &:= X_2 \times \{1\} \cup X_0 \times [\tfrac{1}{2}, 1]; \\ X'_0 &:= X'_1 \cap X'_2 = X_0 \times \{\tfrac{1}{2}\}. \end{aligned}$$

Dann ist, wie man sich leicht überlegt, die Inklusion $X'_0 \hookrightarrow X'_1$ eine Kofaserung. Wir können auf X' , X'_i ($i = 0, 1, 2$) Fall (i) anwenden. Sei $pr : X \times I \rightarrow X$ die Projektion. Folgendes Diagramm kommutiert (in den Zeilen die offensichtlichen Abbildungen):

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & K^{-n}(X') & \longrightarrow & K^{-n}(X'_1) \oplus K^{-n}(X'_2) & \longrightarrow & K^{-n}(X'_0) \xrightarrow{\partial^{-n}} K^{-n+1}(X') \longrightarrow \dots \\ & & \uparrow (pr|_{X'})^* & & \uparrow (pr|_{X'_1})^* \oplus (pr|_{X'_2})^* & & \uparrow (pr|_{X'_0})^* \\ \dots & \longrightarrow & K^{-n}(X) & \longrightarrow & K^{-n}(X_1) \oplus K^{-n}(X_2) & \longrightarrow & K^{-n}(X_0) \longrightarrow \dots \end{array}$$

Offenbar sind $pr|_{X'_i} : X'_i \rightarrow X_i$ ($i = 0, 1, 2$) Homotopieäquivalenzen mit den entsprechenden Inklusionen als Homotopieinversen und damit $(pr|_{X'_i})^*$ Isomorphismen. Man muß lediglich eine Homotopieinverse zu $pr|_{X'} : X' \rightarrow X$ konstruieren. Nach Voraussetzung ist $X = \text{Int}(X_1) \cup \text{Int}(X_2)$. Sei $\{\psi_1, \psi_2\}$ eine untergeordnete Zerlegung der Eins. Dann liefert die Abbildung $X \rightarrow X'$, $x \mapsto (x, \psi_2(x))$ eine Homotopieinverse. \square

Kapitel 4

Produkte in K -Theorie

Ziel dieses Kapitels ist es, $K(X)$ eine Ringstruktur zu geben und $K(X, A)$ zu einem $K(X)$ -Modul zu machen. Allgemeiner: $K^*(X) := \bigoplus_{n \geq 0} K^{-n}(X)$ wird graduerter Ring und $K^*(X, A) := \bigoplus_{n \geq 0} K^{-n}(X, A)$ graduerter $K^*(X)$ -Modul. Dies geschieht in mehreren Schritten.

4.1 Vektorraumbündel-Kettenkomplexe

1. Schritt: *Definition von K -Gruppen für Vektorraumbündel-Kettenkomplexe*

Definition 4.1.1 (Vektorraumbündel-Kettenkomplex).

- (i) Ein *Vektorraumbündel-Kettenkomplex (VRB-Kettenkomplex)* über dem Ko-Raumpaard (X, A) ist ein endlich-dimensionaler Kettenkomplex $C = (C_*, c_*)$ von Vektorraumbündeln über X , dessen Restriktion auf A azyklisch ist.

D.h. es gibt ein $N \geq 0$, so daß $C_n = 0$ für $n > N$ oder $n < 0$ („endlich-dimensional“), und die Sequenz

$$0 \longrightarrow C_N \xrightarrow{c_N} \dots \xrightarrow{c_{n+1}} C_n \xrightarrow{c_n} C_{n-1} \xrightarrow{c_{n-1}} \dots \xrightarrow{c_1} C_0 \longrightarrow 0$$

von Vektorraumbündeln über X und Bündelabbildungen erfüllt $c_{n-1} \circ c_n = 0 \quad \forall n$ („Kettenkomplex ...“), und für jedes $x \in A$ ist die Einschränkung

$$0 \longrightarrow C_{N|x} \xrightarrow{c_{N|x}} \dots \xrightarrow{c_{n|x}} C_{n-1|x} \xrightarrow{c_{n-1|x}} \dots \xrightarrow{c_{1|x}} C_{0|x} \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von Vektorräumen („Restriktion auf A azyklisch“).

- (ii) Ein *Kettenhomomorphismus* zwischen zwei VRB-Kettenkomplexen $C = (C_*, c_*)$, $D = (D_*, d_*)$ über (X, A) ist eine Folge $f = (f_*)$ von

Bündelabbildungen, so daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{c_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{c_n} & C_{n-1} & \xrightarrow{c_{n-1}} & \dots \\ & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \\ \dots & \xrightarrow{d_{n+1}} & D_n & \xrightarrow{d_n} & D_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} & \dots \end{array}$$

- (iii) Eine *exakte Sequenz* von VRB-Kettenkomplexen (C_*^k, c_*^k) ist eine Folge (f_*^k) von Kettenhomomorphismen

$$\dots \longrightarrow (C_*^k, c_*^k) \xrightarrow{(f_*^k)} (C_*^{k-1}, c_*^{k-1}) \xrightarrow{(f_*^{k-1})} \dots,$$

so daß $\forall x \in X$ und $\forall n \in \mathbb{N}$ die Restriktion

$$\dots \longrightarrow C_{n|x}^k \xrightarrow{f_{n|x}^k} C_{n|x}^{k-1} \xrightarrow{f_{n|x}^{k-1}} C_{n|x}^{k-2} \longrightarrow \dots$$

eine exakte Sequenz von Vektorräumen ist.

- (iv) Zwei VRB-Kettenkomplexe (E_*^0, e_*^0) und (E_*^1, e_*^1) über (X, A) heißen *homotop*, wenn es einen VRB-Kettenkomplex (E_*, e_*) über $(X \times I, A \times I)$ gibt, so daß

$$(E_{*|X \times \{i\}}, e_{*|X \times \{i\}}) \cong (E_*^i, e_*^i) \quad (i = 0, 1).$$

Dies ist eine *Äquivalenzrelation* (Bezeichnung: \simeq) auf der Menge der VRB-Kettenkomplexe über (X, A) . Die Transitivität folgt, da man auch VRB-Kettenkomplexe gemäß Lemma 2.15 verkleben kann.

Definition 4.1.2. Für ein Ko-Raumpaar (X, A) sei $K(X, A)^c$ die freie abelsche Gruppe, die von den VRB-Kettenkomplexen über (X, A) erzeugt wird, wobei folgende Relationen gelten sollen:

- (i) $C_* \simeq D_* \Rightarrow [C_*] = [D_*] \in K(X, A)^c$;
(ii) $0 \longrightarrow C_* \longrightarrow D_* \longrightarrow E_* \longrightarrow 0$ kurze exakte Sequenz von VRB-Kettenkomplexen $\Rightarrow [C_*] - [D_*] + [E_*] = 0 \in K(X, A)^c$;
(iii) $[\dots 0 \longrightarrow E \xrightarrow{\text{Id}_E} E \longrightarrow 0 \dots] = 0 \in K(X, A)^c$.

2. Schritt: Identifikation $K(X, A) \leftrightarrow K(X, A)^c$

Lemma 4.1.3 (Konstruktion eines Homo. $a : K(X, A) \rightarrow K(X, A)^c$).

Sei $[E_1, f, E_0] \in K(X, A)$ und $e_1 : E_1 \rightarrow E_0$ eine Fortsetzung von f über ganz X (siehe Lemma 2.8(ii)). Sei $(E_*, e_*) := (0 \rightarrow E_1 \xrightarrow{e_1} E_0 \rightarrow 0)$ der eindimensionale VRB-Kettenkomplex. Setze

$$a([E_1, f, E_0]) := [(E_*, e_*)].$$

Wohldefiniertheit: Sei $e'_1 : E_1 \rightarrow E_0$ eine andere Fortsetzung von f . Dann betrachte den Kettenkomplex

$$0 \longrightarrow E_1 \times I \xrightarrow{(t \cdot e_1 + (1-t) \cdot e'_1) \times \text{Id}} E_0 \times I \longrightarrow 0$$

über $(X \times I, A \times I)$ (Beachte: $(t \cdot e_1 + (1-t) \cdot e'_1)_x = f_x \ \forall x \in A$). Somit gilt also $(E_*, e_*) \simeq (E'_*, e'_*)$, damit folgt $[(E_*, e_*)] = [(E'_*, e'_*)]$ in $K(X, A)^c$. Außerdem beachte noch, daß elementare Tripel gemäß Definition 4.1.2(iii) auf $0 \in K(X, A)^c$ und isomorphe Tripel wegen Definition 4.1.2(ii) auf dasselbe Element abgebildet werden.

Bemerkung 4.1.4. Es sei (C_*, c_*) ein VRB-Kettenkomplex über (X, A) . Eine *Kettenkontraktion* (über A) γ ist eine Familie von Bündelabbildungen $\gamma_n : C_{n|A} \rightarrow C_{n+1|A}$ über A mit der Eigenschaft $\gamma_{n-1} \circ c_{n|A} + c_{n+1|A} \circ \gamma_n = \text{Id}_A$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & C_{n+1|A} & \xrightarrow{c_{n+1|A}} & C_{n|A} & \xrightarrow{c_{n|A}} & C_{n-1|A} & \longrightarrow & \dots \\
 & & & & \downarrow \gamma_n & & \downarrow \gamma_{n-1} & & \\
 & & & & \text{Id}_A & & & & \\
 & & & & \downarrow \vdots & & & & \\
 \dots & \longrightarrow & C_{n+1|A} & \xrightarrow{c_{n+1|A}} & C_{n|A} & \xrightarrow{c_{n|A}} & C_{n-1|A} & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Wir zeigen zunächst die Existenz einer solchen Kettenkontraktion. (Dies ist in gewissem Sinne eine „parametrisierte“ Form des vielleicht aus der Algebraischen Topologie bekannten Satzes: Ein freier Kettenkomplex ist genau dann azyklisch, wenn er kontraktibel ist.)

Wähle auf jedem C_n eine Riemannsche Metrik. Dann kann man mit der Vorschrift

$$\langle c_{n+1|x}(v), w \rangle_{C_{n|x}} = \langle v, c_{n|x}^*(w) \rangle_{C_{n+1|x}} \quad (v \in C_{n+1|x}, w \in C_{n|x})$$

zu jedem c_{n+1} einen fasernweise adjungierten Operator

$$c_n^* : C_n \longrightarrow C_{n+1}$$

definieren. Es gilt fasernweise offenbar die Beziehung

$$\text{Kern}(c_{n|x}^*)^\perp = \text{Bild}(c_{n+1|x}) \tag{4.1}$$

Für $x \in A$ folgt aus $H_n(C_{*|x}) = 0$ außerdem $\text{Bild}(c_{n+1|x}) = \text{Kern}(c_{n|x})$, also ist für $x \in A$

$$C_{n|x} = \text{Kern}(c_{n|x}) \perp \text{Kern}(c_{n|x}^*). \tag{4.2}$$

Wir definieren den *Laplace-Operator*

$$\Delta^n := c_{n-1}^* \circ c_n + c_{n+1} \circ c_n^* : C_n \longrightarrow C_n.$$

Für $x \in A$ ist Δ_x^n ein Isomorphismus: Denn sei $x \in A$, $v \in C_{n|x}$ mit $\Delta_x^n(v) = 0$. Dann folgt (Der Index x an den Operatoren wird der Einfachheit halber weglassen.)

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \Delta^n(v), v \rangle \\ &= \langle (c_{n-1}^* \circ c_n + c_{n+1} \circ c_n^*)(v), v \rangle \\ &= \langle c_n(v), c_n(v) \rangle + \langle c_n^*(v), c_n^*(v) \rangle \\ &= \|c_n(v)\|^2 + \|c_n^*(v)\|^2. \end{aligned}$$

Also ergibt sich mit (4.2)

$$v \in \text{Kern}(c_{n|x}) \cap \text{Kern}(c_{n|x}^*) = 0.$$

Wir können somit die Abbildung $\gamma_n : C_{n|A} \rightarrow C_{n+1|A}$

$$\gamma_n := (\Delta_{|A}^{n+1})^{-1} \circ c_{n|A}^*$$

definieren. Man rechnet nach, daß γ_n eine Kettenkontraktion ist.

Lemma 4.1.5 (Konstruktion eines Homo. $b : K(X, A)^c \rightarrow K(X, A)$).

Sei wie oben (C_*, c_*) ein VRB-Kettenkomplex über (X, A) . Nun definiert man für eine beliebige (!) Kettenkontraktion γ

$$b([C_*, c_*]) := [C_{ung}, (c_{|A} + \gamma), C_{ger}]$$

mit $C_{ung} := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} C_{2k+1}$ und $C_{ger} := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} C_{2k}$.

Wohldefiniertheit: Wir müssen zeigen

- (i) $(c_{|A} + \gamma)$ ist ein Isomorphismus;
- (ii) $[C_{ung}, (c_{|A} + \gamma), C_{ger}]$ ist unabhängig von der speziellen Wahl von γ .
- (iii) b ist mit den Relationen in $K(X, A)^c$ verträglich.

Teil (ii) benötigt man zum Beweis von Teil (iii), da man dann die Abbildung mit einer *beliebigen* Kettenkontraktion definieren kann.

Zu (i) und (ii): Sei $\gamma' = (\gamma'_n)$ eine andere Kettenkontraktion. Definiere $\delta^n : C_{n|A} \rightarrow C_{n+2|A}$ als $\delta^n := (\gamma'_{n+1} - \gamma_{n+1}) \circ \gamma_n$ und damit die Abbildungen

$$\begin{aligned} f : C_{ger|A} &\xrightarrow{\text{Id} + \delta} C_{ger|A} \quad \text{und} \\ g : C_{unger|A} &\xrightarrow{(c_A + \gamma)} C_{ger|A} \xrightarrow{f} C_{ger|A} \xrightarrow{c_{|A} + \gamma'} C_{unger|A}. \end{aligned}$$

Man überlegt sich, daß f und g durch Dreiecksmatrizen gegeben sind, bei denen alle Diagonaleinträge die Identität sind, also sind f und g Isomorphismen. Aus der Definition von g folgt somit, daß $(c_{|A} + \gamma)$ injektiv, $(c_{|A} + \gamma')$ surjektiv ist. Aus Symmetriegründen sind also beide Abbildungen Isomorphismen. Damit ist (i) bewiesen.

Wir definieren nun eine Homotopie von Bündelisomorphismen $h : C_{ung|A} \times I \rightarrow C_{ger|A}$ durch

$$h_t := (\text{Id} + t \cdot \delta) \circ (c_{|A} + \gamma).$$

Es ist $h_0 = (c_{|A} + \gamma)$ und $h_1 = f \circ (c_{|A} + \gamma)$. Sei $p : X \times I \rightarrow X$ die kanonische Projektion. Dann ergibt sich mittels h der folgende Isomorphismus von Bündeln über $A \times I$:

$$\begin{array}{ccc} \bar{h} : (p^* C_{ung})|_{A \times I} & \longrightarrow & (p^* C_{ger})|_{A \times I} \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ C_{ung|A} \times I & \xrightarrow{h \times \text{Id}_I} & C_{ger|A} \times I \end{array}$$

Damit ergibt sich das Tripel $[p^* C_{ung}, \bar{h}, p^* C_{ger}]$ über $(X \times I, A \times I)$ (aufgefaßt in $K(X \times I, A \times I)$). Für $k = 0, 1$ sei $i_k : X \rightarrow X \times I$, $x \mapsto (x, k)$ die Inklusion. Die beiden Abbildungen sind homotop, daher folgt aus Satz 3.11

$i_0^* = i_1^* : K^0((X, A) \times I) \rightarrow K(X, A)$, also ist

$$\begin{aligned} [C_{ung}, (c_{|A} + \gamma), C_{ger}] &= i_0^*[p^* C_{ung}, \bar{h}, p^* C_{ger}] \\ &= i_1^*[p^* C_{ung}, \bar{h}, p^* C_{ger}] = [C_{ung}, f \circ (c_{|A} + \gamma), C_{ger}]. \end{aligned}$$

Dasselbe Argument kann man auf die Abbildung $(c_{|A} + \gamma')^{-1} \circ g$ anwenden, und dies führt zu

$$[C_{ung}, (c_{|A} + \gamma')^{-1}, C_{ger}] = [C_{ung}, (c_{|A} + \gamma') \circ g, C_{ger}].$$

Wegen $f \circ (c_{|A} + \gamma) = (c_{|A} + \gamma')^{-1} \circ g$ folgt aus den letzten beiden Gleichungen jetzt (das zweite „ $=$ “ folgt wie das erste im speziellen Fall $\gamma = \gamma'$)

$$[C_{ung}, (c_{|A} + \gamma), C_{ger}] = [C_{ung}, (c_{|A} + \gamma')^{-1}, C_{ger}] = [C_{ung}, (c_A + \gamma'), C_{ger}],$$

und damit ist (ii) bewiesen.

Zu (iii): Verträglichkeit von b mit den Relationen in $K(X, A)^c$.

- $C_* \simeq D_* \Rightarrow b([C_*]) = b([D_*])$ wegen Homotopieinvarianz (Satz 3.11); vgl. obiger Beweis.

- Sei $0 \longrightarrow C_* \xrightarrow{i_*} D_* \xrightarrow{p_*} E_* \longrightarrow 0$ eine exakte Sequenz von VRB-Kettenkomplexen. Wähle eine Kettenkontraktion ε von $E|_A$. Wir wollen einen Spalt $s_* : E_* \longrightarrow D_*$ von p_* konstruieren (insbesondere muß s_* eine Abbildung von VRB-Kettenkomplexen sein):

Es ist $i_n(C_n)$ ein Unterbündel von D_n für $n \geq 0$. Sei C_n^\perp das orthogonale Komplement von $i_n(C_n)$ in D_n , nachdem man jedes D_n mit einer Riemannschen Metrik versehen hat. Dann ist die Einschränkung $p_n| : C_n^\perp \rightarrow E_n$ ein Isomorphismus. Sei $j_n : C_n^\perp \rightarrow D_n$ die Inklusion und $t_n := j_n \circ (p_n|)^{-1} : E_n \rightarrow D_n$.

Problem: t_* muß im allgemeinen noch keine Kettenabbildung sein.

Trick: Definiere

$$s_n := d_{n+1} \circ t_{n+1} \circ \varepsilon_n + t_n \circ \varepsilon_{n-1} \circ e_n : E_n \rightarrow D_n.$$

Man rechnet nun leicht nach, daß s_* eine Kettenabbildung und ein Spalt zu p_* ist. Man erhält somit einen Isomorphismus von VRB-Kettenkomplexen

$$i_* \oplus s_* : C_* \oplus E_* \rightarrow D_*.$$

Nun überlegt man sich leicht, daß die Konstruktion von b mit direkter Summenbildung verträglich ist, d.h. es ist $b([D_*]) = b([C_* \oplus E_*]) = b([C_*]) \oplus b([E_*])$.

- Schließlich gilt $b([\dots \rightarrow 0 \rightarrow E \xrightarrow{\text{Id}_E} E \rightarrow 0 \rightarrow \dots]) = [E, \text{Id}_E, E] = 0 \in K(X, A)$. \square

Wir wollen zeigen, daß die Homomorphismen a und b zueinander invers sind. Für den Beweis benötigen wir die folgenden beiden Lemmata:

Lemma 4.1.6. *Sei (X, A) ein Raumpaard. Seien E_0, \dots, E_n Vektorraumbündel über X und $\sigma_i : E_{i|A} \rightarrow E_{i-1|A}$ ($1 \leq i \leq n$) Bündelhomomorphismen, so daß die Sequenz*

$$0 \longrightarrow E_{n|A} \xrightarrow{\sigma_n} E_{n-1|A} \xrightarrow{\sigma_{n-1}} \dots \xrightarrow{\sigma_1} E_{0|A} \longrightarrow 0$$

(fasernweise) exakt ist. Dann kann man die σ_i zu Bündelhomomorphismen $\rho_i : E_i \rightarrow E_{i-1}$ fortsetzen, so daß $\rho_i \circ \rho_{i+1} = 0$ ($1 \leq i \leq n-1$) gilt, d.h. daß

$$0 \longrightarrow E_n \xrightarrow{\rho_n} E_{n-1} \xrightarrow{\rho_{n-1}} \dots \xrightarrow{\rho_1} E_0 \longrightarrow 0$$

ein VRB-Kettenkomplex über (X, A) ist.

BEWEIS:

Wir zeigen: Es gibt eine offene Umgebung U von A in X und Fortsetzungen $\tau_i : E_{i|U} \rightarrow E_{i-1|U}$ von σ_i ($1 \leq i \leq n-1$), so daß

$$0 \longrightarrow E_{n|U} \xrightarrow{\tau_n} E_{n-1|U} \xrightarrow{\tau_{n-1}} \dots \xrightarrow{\tau_1} E_{0|U} \longrightarrow 0$$

exakt ist. Dann ist man fertig, wenn man die τ_i mit einer Funktion $f : X \rightarrow [0, 1]$ mit $f|_A \equiv 1$ und $f|_{(X \setminus U)} \equiv 0$ multipliziert und so auf ganz X definieren kann.

Wir gehen induktiv vor und zeigen für $0 \leq i \leq n$, daß es eine abgeschlossene Umgebung U_i von A in X gibt mit Fortsetzungen τ_1, \dots, τ_i von $\sigma_1, \dots, \sigma_i$ auf U_i , so daß

$$E_{i|U_i} \xrightarrow{\tau_i} E_{i-1|U_i} \xrightarrow{\tau_{i-1}} \dots \xrightarrow{\tau_1} E_{0|U_i} \longrightarrow 0$$

exakt ist. Der Induktionsanfang für $i = 0$ ist trivial ($U_0 := X$). Beim Induktionsschritt setze $K_i := \text{Kern}(\tau_i)$. K_i ist ein Unterbündel von $E_{i|U_i}$, weil $\text{Rang}(\tau_{i|x}) = \dim(\text{Kern}(\tau_{i-1|x})) = \text{const.}$ ist wegen Exaktheit und Induktionsvoraussetzung. Wir können σ_{i+1} als Schnitt von $\text{Hom}(E_{i+1|U_i}, K_i)$ über $A \subset U_i$ auffassen, und nach Lemma 2.8(i) können wir σ_{i+1} zu τ_{i+1} auf U_i fortsetzen. Für $x \in A$ ist ferner $\text{Rang}(\tau_{i+1|x}) = \text{Rang}(\sigma_{i+1|x}) = \dim(K_{i,x})$, also maximal. Da der Rang (als Funktion von x) lokal höchstens ansteigen kann, finden wir in U_i auch eine abgeschlossene Umgebung U_{i+1} von A , so daß $\sigma_{i+1|U_{i+1}} : E_{i+1|U_{i+1}} \rightarrow K_{i|U_{i+1}}$ surjektiv ist. \square

Lemma 4.1.7. *Seien*

$$0 \longrightarrow E_n \xrightarrow{\sigma_n} E_{n-1} \xrightarrow{\sigma_{n-1}} \dots \xrightarrow{\sigma_1} E_0 \longrightarrow 0 \quad =: (E_*, \sigma_*),$$

$$0 \longrightarrow E_n \xrightarrow{\tau_n} E_{n-1} \xrightarrow{\tau_{n-1}} \dots \xrightarrow{\tau_1} E_0 \longrightarrow 0 \quad =: (E_*, \tau_*)$$

VRB-Kettenkomplexe über (X, A) mit

$$\sigma_{i|A} = \tau_{i|A} \quad (1 \leq i \leq n).$$

Dann gilt

$$[E_*, \sigma_*] = [E_*, \tau_*] \in K(X, A)^c.$$

BEWEIS:

Wir zeigen, daß (E_*, σ_*) und (E_*, τ_*) homotop als VRB-Kettenkomplexe über (X, A) sind. Wir definieren dazu auf $X \times \{0\} \cup X \times \{1\} \cup A \times I$ den VRB-Kettenkomplex (F_*, φ_*) mit

$$\begin{aligned} (F_*, \varphi_*)|_{X \times \{0\}} &= (E_*, \sigma_*), \\ (F_*, \varphi_*)|_{X \times \{1\}} &= (E_*, \tau_*), \\ (F_*, \varphi_*)|_{A \times I} &= (E_*, \sigma_*)|_A \times I \\ &= (E_*, \tau_*)|_A \times I. \end{aligned}$$

Jetzt müssen wir uns noch überlegen, daß man (F_*, φ_*) zu einem VRB-Kettenkomplex über ganz $X \times I$ fortsetzen kann. Erst einmal wählen wir die offensichtlichen Fortsetzungen auf $X \times [0, \frac{1}{4}]$ und $X \times [\frac{3}{4}, 1]$. Nun wählen wir eine

abgeschlossene Umgebung V von A in X , so daß $(E_*, \sigma_*)|_V$ und $(E_*, \tau_*)|_V$ noch azyklisch sind. Nach Lemma 4.1.6 kann man den so auf $V \times \{\frac{1}{4}\} \cup A \times [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \cup V \times \{\frac{3}{4}\}$ gegebenen azyklischen VRB-Kettenkomplex zu einem auf $X \times [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ fortsetzen. Über $V \times \{\frac{1}{4}\}$ und $V \times \{\frac{3}{4}\}$ stimmt dieser mit den zuerst definierten Fortsetzungen auf $X \times [0, \frac{1}{4}]$ bzw. $X \times [\frac{3}{4}, 1]$ überein. Daher definiere nun eine Funktion $f : X \times I \longrightarrow [0, 1]$ mit

- $f \equiv 1$ auf $X \times \{0\} \cup A \times I \cup X \times \{1\}$;
- $f \equiv 0$ auf $(X \setminus V) \times \{\frac{1}{4}\} \cup (X \setminus V) \times \{\frac{3}{4}\}$.

Wenn wir alle Differentiale der konstruierten Fortsetzungen mit f faserweise multiplizieren, „passen“ die Fortsetzungen zusammen und ergeben eine von (F_*, φ_*) auf ganz $X \times I$. \square

Lemma 4.1.8. *Die Homomorphismen a und b sind zueinander invers.*

BEWEIS:

Leicht zu sehen ist $b \circ a = \text{Id}_{K(X,A)}$. Es genügt nun zu zeigen, daß a surjektiv ist. Dazu muß man zeigen, daß sich die Klasse $[(C_*, c_*)] \in K(X, A)^c$ jedes VRB-Kettenkomplexes (C_*, c_*) durch einen eindimensionalen VRB-Kettenkomplex repräsentieren läßt.

In $K(X, A)^c$ gilt offenbar die Gleichung

$$[0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{c_n} C_{n-1} \xrightarrow{c_{n-1}} \dots \xrightarrow{c_1} C_0 \longrightarrow 0] =$$

$$[0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{c_n \oplus 0} C_{n-1} \oplus C_n \xrightarrow{c_{n-1} \oplus \text{Id}} C_{n-2} \oplus C_n \longrightarrow \dots \xrightarrow{c_1} C_0 \longrightarrow 0].$$

Die beiden Bündelabbildungen $(c_n \oplus 0)|_A$ und $(0 \oplus \text{Id})|_A : C_n \longrightarrow C_{n-1} \oplus C_n$ sind (linear) homotop als Bündelmonomorphismen über A . Wir können $(0 \oplus \text{Id})|_A$ zu einem Monomorphismus $0 \oplus \text{Id}$ über ganz X fortsetzen. Nach Korollar 2.14 (in leicht abgewandelter Form) läßt sich deshalb auch $(c_n \oplus 0)|_A$ zu einem Monomorphismus $\tau : C_n \longrightarrow C_{n-1} \oplus C_n$ über ganz X fortsetzen. Es ist $\tau(C_n)$ ein Unterbündel von $C_{n-1} \oplus C_n$. Sei Q ein Komplement von $\tau(C_n)$ in $C_{n-1} \oplus C_n$ und $\gamma := (c_{n-1} \oplus \text{Id})|_Q : Q \longrightarrow C_{n-2} \oplus C_n$. Dann stimmen der VRB-Kettenkomplex

$$0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{c_n \oplus 0} C_{n-1} \oplus C_n \xrightarrow{c_{n-1} \oplus \text{Id}} C_{n-2} \oplus C_n \longrightarrow \dots \xrightarrow{c_1} C_0 \longrightarrow 0$$

und der VRB-Kettenkomplex

$$0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{\tau} \tau(C_n) \oplus Q \xrightarrow{\gamma \circ \text{pr}_Q} C_{n-2} \oplus C_n \longrightarrow \dots \xrightarrow{c_1} C_0 \longrightarrow 0$$

über A überein. Somit repräsentieren sie nach Lemma 4.1.7 dieselbe Klasse in $K(X, A)^c$. Da nun aber gilt

$$[0 \longrightarrow C_n \xrightarrow[\cong]{\tau} \tau(C_n) \longrightarrow 0] = 0 \in K(X, A)^c$$

(vgl. Definition 4.1.2(iii)), folgt insgesamt

$$[0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{c_n} C_{n-1} \xrightarrow{c_{n-1}} \dots \xrightarrow{c_1} C_0 \longrightarrow 0] =$$

$$[0 \longrightarrow 0 \longrightarrow Q \xrightarrow{\gamma} C_{n-2} \oplus C_n \longrightarrow \dots \xrightarrow{c_1} C_0 \longrightarrow 0].$$

Dieser letzte VRB-Kettenkomplex ist aber der Länge nach gegenüber dem ersten um eine Dimension verkürzt. Per Induktion folgt die Behauptung. \square

4.2 Definition von Produkten in K -Theorie

Definition 4.2.1 (Tensorprodukt von VRB-Kettenkomplexen).

Sei $C := (C_*, c_*)$ ein VRB-Kettenkomplex über (X, A) und $C' := (C'_*, c'_*)$ ein VRB-Kettenkomplex über (X', A') . Das *Tensorprodukt* $(C \otimes C', c_* \otimes \text{Id}' + \text{Id} \otimes c'_*)$ sei der folgende VRB-Kettenkomplex über $(X, A) \times (X', A') = (X \times X', X \times A' \cup A \times X')$:

$$(C \otimes C')_n := \bigoplus_{i+j=n} C_i \hat{\otimes} C'_j$$

Dabei bezeichne $E \hat{\otimes} E'$ für Vektorraumbündel E über X und E' über X' das sogenannte *äußere Tensorprodukt*

$$E \hat{\otimes} E' := \pi_X^*(E) \otimes \pi_{X'}^*(E')$$

(Tensorprodukt von Vektorraumbündeln über $X \times X'$), wobei $\pi_X : X \times X' \rightarrow X$ und $\pi_{X'} : X \times X' \rightarrow X'$ die kanonischen Projektionen sind. Das n -te Differential $(C \otimes C')_n \rightarrow (C \otimes C')_{n-1}$ wird auf dem Summanden $C_i \hat{\otimes} C'_j$ durch

$$c_i \hat{\otimes} \text{Id} + (-1)^i \text{Id} \hat{\otimes} c'_j$$

gegeben. Man überlegt sich, daß diese Konstruktion tatsächlich einen VRB-Kettenkomplex über $(X, A) \times (X', A')$ liefert.

Lemma 4.2.2. *Das Tensorprodukt von VRB-Kettenkomplexen ist in beiden Komponenten mit den Relationen in $K(X, A)^c$ bzw. $K(X', A')^c$ (vgl. Definition 4.1.2) verträglich und natürlich. \square*

Korollar 4.2.3. *Es gibt eine natürliche Paarung*

$$K(X, A)^c \otimes K(X', A')^c \xrightarrow{\cup^c} K((X, A) \times (X', A'))^c$$

(links ein Tensorprodukt von abelschen Gruppen). Diese Paarung erfüllt das kanonische Assoziativ- bzw. Kommutativgesetz. Genauso hat man für $m, n \geq 0$ natürliche Paarungen

$$K((X, A) \times (I, \partial I)^n)^c \otimes K((X', A') \times (I, \partial I)^m)^c \xrightarrow{\cup^c} K((X, A) \times (X', A') \times (I, \partial I)^{n+m})^c.$$

Nach Lemma 4.1.8 gilt nun aber

$$K(-) \cong K(-)^c,$$

also erhält man für $n, m \geq 0$ natürliche Paarungen

$$K^{-n}(X, A) \otimes K^{-m}(X', A') \xrightarrow{\cup} K^{-n-m}((X, A) \times (X', A')). \quad \square$$

Dieses äußere Produkt $x \otimes y \mapsto x \cup y$ nennt man auch Cup-Produkt.

Beispiel 4.2.4. Das Cup-Produkt

$$K^0(X) \otimes K^0(X') \longrightarrow K^0(X \times X')$$

ist gegeben durch

$$[E_1, E_0] \cup [E'_1, E'_0] = [E_1 \hat{\otimes} E'_0 \oplus E_0 \hat{\otimes} E'_1, E_1 \hat{\otimes} E'_1 \oplus E_0 \hat{\otimes} E'_0].$$

Beachte dabei: Tripel über (X, A) werden zu „Dupeln“, wenn $A = \emptyset$ ist.

Korollar 4.2.5. *Von besonderem Interesse ist der Spezialfall $(X', A') = (X, B)$ mit $B \subset X$.*

Die Diagonalabbildung (verknüpft mit der Inklusion)

$$\Delta : (X, A \cup B) \hookrightarrow ((X, A) \times (X, B)), \quad x \mapsto (x, x)$$

liefert einen Homomorphismus

$$\Delta^* : K^{-n-m}((X, A) \times (X, B)) \longrightarrow K^{-n-m}(X, A \cup B).$$

Zusammen mit der Paarung aus 4.2.3 ergibt sich das Produkt

$$K^{-n}(X, A) \otimes K^{-m}(X, B) \longrightarrow K^{-n-m}(X, A \cup B),$$

das wir künftig mit $x \otimes y \mapsto x \cdot y$ bezeichnen werden. □

- $A = B = \emptyset$: $K^*(X) := \bigoplus_{n \geq 0} K^{-n}(X)$ wird so kommutativer assoziativer graduerter Ring mit Eins. („Kommutativ“ meint hier natürlich „kommutativ als graduerter Ring“.)
- Genauso kann man für $A \subset B \subset X$ ein Produkt

$$K^{-n}(X) \otimes K^{-m}(B, A) \longrightarrow K^{-n-m}(B, A)$$

definieren. Dann ist $K^*(B, A) := \bigoplus_{n \geq 0} K^{-n}(B, A)$ graduerter Modul über $K^*(X)$.

- Man überlegt sich, daß die von Inklusionen $i : (B', A') \hookrightarrow (B, A)$ induzierten Abbildungen $i^* : K^{-n}(B, A) \rightarrow K^{-n}(B', A')$ $K^0(X)$ -linear sind; insbesondere sind dann auch alle in der langen exakten Sequenz (Satz 3.14) vorkommenden Abbildungen $K(X)$ -linear. Außerdem ist auch der Ausschneidungsisomorphismus $K(X)$ -linear.

Für später beweisen wir noch eine Rechenregel.

Lemma 4.2.6. *Seien $a, a' \in K(X)$, $b, b' \in K(Y)$. Dann ist*

$$a \cdot a' \cup b \cdot b' = (a \cup b) \cdot (a' \cup b') \in K(X \times Y).$$

BEWEIS:

Sei $\tau : X \times Y \rightarrow Y \times X$ die Abbildung, die die beiden Faktoren vertauscht. Die Aussage ergibt sich aus dem folgenden kommutativen Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 K(X) \otimes K(Y) \otimes K(X) \otimes K(Y) & \xrightarrow{\text{Id} \otimes \tau^* \otimes \text{Id}} & K(X) \otimes K(X) \otimes K(Y) \otimes K(Y) & \equiv & K(X) \otimes K(X) \otimes K(Y) \otimes K(Y) \\
 \downarrow \cup & & \downarrow \cup & & \downarrow \cup \otimes \cup \\
 K(X \times Y \times X \times Y) & \xrightarrow{(\text{Id} \times \tau \times \text{Id})^*} & K(X \times X \times Y \times Y) & \xleftarrow{\cup} & K(X \times X) \otimes K(Y \times Y) \\
 \downarrow \Delta^* & & \downarrow (\Delta \times \Delta)^* & & \downarrow \Delta^* \otimes \Delta^* \\
 K(X \times Y) & \xlongequal{\quad\quad\quad} & K(X \times Y) & \xleftarrow{\cup} & K(X) \otimes K(Y)
 \end{array}$$

Begründung der Kommutativität: (1), (4) wg. Natürlichkeit von \cup ; (2) wg. Assoziativität von \cup ; (3) kommutiert bereits auf Raumniveau.

Wählt man als „Weg“ die linke Vertikale im Diagramm, so wird $a \otimes b \otimes a' \otimes b'$ auf $(a \cup b) \cdot (a' \cup b')$ abgebildet. Geht man dagegen „rechts außen herum“, so wird $a \otimes b \otimes a' \otimes b'$ auf $a \cdot a' \cup b \cdot b'$ abgebildet. \square

Aufgabe 4.2.7. Sei X ein kompakter zusammenhängender wohlpunktierter Hausdorffraum mit Basispunkt pt (siehe Definition 1.4). Zeige, daß jedes Element in $\tilde{K}^0(X) := K^0(X, pt)$ *nilpotent* ist, d.h. es gibt für jedes $x \in \tilde{K}^0(X)$ ein $n = n(x)$ mit $x^n = 0$.

Tip: Betrachte für eine abgeschlossene Teilmenge $i : Y \hookrightarrow X$ die Gruppe $\overline{K}_Y(X) := \text{Kern}(i^* : K(X) \rightarrow K(Y))$. Verwende die Ringstruktur von $K(X)$, um zu zeigen, daß $\overline{K}_Y(X) \cdot \overline{K}_{Y'}(X) \subset \overline{K}_{Y \cup Y'}(X)$ gilt. Nun Induktion und geeignete Wahl der Mengen Y .

Aufgabe 4.2.8. Kann das n aus der vorigen Aufgabe für die Räume $X = S^m$, $\mathbb{R}P^m$ oder $\mathbb{C}P^m$ auch global (d.h. *ein* festes n für *alle* x) gewählt werden? (In diesem Fall nennt man den Ring $\tilde{K}^0(X)$ *nilpotent*.) Wenn ja, dann finde jeweils ein möglichst kleines n .

Kapitel 5

Bott-Periodizität

Die diesem Kapitel zugrundeliegende Ausarbeitung stammt von Christian Weber und entstand im Rahmen eines Seminars über topologische K-Theorie unter der Leitung von Dr. Peter Teichner am Fachbereich Mathematik der Universität Mainz im WS 1991/92. Aus Anlaß eines weiteren K-Theorie-Seminars im SS 1996 unter der Leitung von Prof. Matthias Kreck und Dr. Peter Teichner wurde der Text überarbeitet und ergänzt.

5.1 Der Periodizitätssatz und Folgerungen

Bezeichnung 5.1.1. Wir werden oft folgende Bezeichnungen verwenden:

- H sei das kanonische Linienbündel über $S^2 \cong \mathbb{C}P^1$ (sogenanntes Hopfbündel), \bar{H} das duale Hopfbündel.
- Ist E ein Vektorraumbündel über dem Raum X , so bezeichnen wir mit $E \in K^0(X)$ verkürzt die Klasse $[0, E]$. (Dann ist $[E, 0] = -E$.)
- Es sei $n := X \times \mathbb{C}^n$ das triviale n -dimensionale Vektorraumbündel über X .

Ziel des Kapitels ist der Beweis von

Satz 5.1.2 (Bott 1958, Atiyah-Bott 1962).

(i) $K(S^2) = \langle 1, H \rangle \cong \mathbb{Z}^2$. Die Ringstruktur ist gegeben durch die Relation $(H - 1)^2 = 0$.

(ii) Die äußere Multiplikation

$$\begin{array}{ccc} \mu : K(X) \otimes K(S^2) & \longrightarrow & K(X \times S^2) \\ a \otimes b & \longmapsto & a \cup b := \pi_X^*(a) \otimes \pi_{S^2}^*(b) \end{array}$$

(π_X, π_{S^2} kanonische Projektionen) ist ein Isomorphismus von Ringen. (Die Ringstruktur auf dem Tensorprodukt ist durch die komponentenweise Multiplikation gegeben.) \square

Bemerkung 5.1.3. Für einen Raum X und $pt \xrightarrow{i} X \xrightarrow{j} (X, pt)$ sei $c : X \rightarrow pt$ die Kollapsabbildung. Dann spaltet die folgende Sequenz natürlich

$$K(X, pt) \xrightarrow{j^*} K(X) \xrightleftharpoons[c^*]{i^*} K(pt).$$

Dieser Spalt ist mit dem externen Produkt verträglich. Somit kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} K(X) \otimes K(S^2) & \xleftarrow[\text{Id} \otimes j^* \oplus \text{Id} \otimes c^*]{\cong} & K(X) \otimes K(S^2, pt) \oplus K(X) \otimes K(pt) \\ \mu \downarrow \cong (5.1.2) & & \tilde{\mu} \downarrow \cong \\ K(X \times S^2) & \xleftarrow[\text{(Id} \times j)^* \oplus (\text{Id} \times c)^*]{\cong} & K(X \times (S^2, pt)) \oplus K(X \times pt) \end{array}$$

Für einen wohlpunktisierten Raum X mit Basispunkt x (siehe Definition 1.4) kann man die *reduzierte K-Theorie* definieren als (vgl. Aufgabe 1.3)

$$\tilde{K}^n(X) := K^{-n}(X, pt).$$

Es ist nach Satz 5.1.2

$$K(S^2, pt) = \underbrace{\langle \beta_2 := 1 - H := [H, 1] \rangle}_{\text{Bott-Element}} \cong \mathbb{Z}$$

mit der einzigen Relation $\beta_2^2 = 0$. Vermöge Ausschneidung (Satz 3.13) folgt aus dem Push-Out

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \hookrightarrow & D^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ pt & \hookrightarrow & S^2 \end{array}$$

der Isomorphismus

$$K(X \times (S^2, pt)) \cong K(X \times (D^2, S^1)) \cong K(X \times (I^2, \partial I^2)) =: K^{-2}(X).$$

Korollar 5.1.4. Sei $j^* : K(S^2, pt) \rightarrow K(D^2, S^1) \cong K(I^2, \partial I^2)$ der Ausschneidungsisomorphismus und

$$\hat{\beta}_2 := j^*(\beta_2) \in K(D^2, S^1),$$

so erhält man für jedes Ko-Raumpaar (X, A) und für $n \geq 0$ einen Isomorphismus

$$K^{-n}(X, A) \xrightarrow[\cong]{\cup \hat{\beta}_2} K^{-n-2}(X, A).$$

BEWEIS:

Wegen der Definition der höheren K -Gruppen genügt es offenbar, den Fall $n = 0$ zu betrachten. Identifizieren von A zu einem Punkt ($p : (X, A) \rightarrow (X/A, pt)$) führt zu dem Push-Out

$$\begin{array}{ccc} pt & \hookrightarrow & X/A \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & X. \end{array}$$

Da $A \hookrightarrow X$ eine Kofaserung ist, gilt dies auch für $pt \hookrightarrow X/A$, und folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} K(X, A) & \xrightarrow{\cup \hat{\beta}_2} & K((X, A) \times (D^2, S^1)) \\ \uparrow p^* \cong & & \uparrow (p \times \text{Id})^* \cong \\ K(X/A, pt) & \xrightarrow{\cup \hat{\beta}_2} & K((X/A, pt) \times (D^2, S^1)) \end{array}$$

Also genügt es, den Fall $A = pt$ zu beweisen: Aus dem kommutativen Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K(X, pt) & \longrightarrow & K(X) & \longrightarrow & K(pt) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \cup \hat{\beta}_2 & & \downarrow \cong \cup \hat{\beta}_2 & & \downarrow \cong \cup \hat{\beta}_2 \\ 0 & \longrightarrow & K^{-2}(X, pt) & \longrightarrow & K^{-2}(X) & \longrightarrow & K^{-2}(pt) \longrightarrow 0 \end{array}$$

und dem Fünfer-Lemma folgt mit Bemerkung 5.1.3 die Behauptung. □

Definition 5.1.5. Für $n \geq 0$ definieren wir

$$K^n(X, A) := K^{-n}(X, A)$$

und machen so $K^* := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} K^n$ zu einer 2-periodischen verallgemeinerten Kohomologietheorie.

Korollar 5.1.6. Mit Beispiel 3.8 ergibt sich also

$$K^n(pt) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & : n \text{ gerade;} \\ 0 & : n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Eine direkte Folgerung daraus ist

$$\tilde{K}^m(S^n) \cong K^m(D^n, S^{n-1}) \cong K^{m-n}(pt) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & : m - n \text{ gerade;} \\ 0 & : m - n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Korollar 5.1.7 (Brouwerscher Fixpunktsatz). *Jede stetige Abbildung $f : D^n \rightarrow D^n$ besitzt einen Fixpunkt (d.h. es gibt $x \in D^n$ mit $f(x) = x$).*

BEWEIS:

Ist $f(x) \neq x$ für alle $x \in D^n$, so kann man für jedes $x \in D^n$ den Halbstrahl im \mathbb{R}^n von $f(x)$ nach x betrachten. Er schneidet S^{n-1} in einem Punkt $r(x)$. Dies liefert eine Retraktion $r : D^n \rightarrow S^{n-1}$. Sei $i : S^{n-1} \rightarrow D^n$ die Inklusion. Folgendes Diagramm müßte kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}^{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{\text{Id}} & \tilde{K}^{n-1}(S^{n-1}) \\ & \searrow r^* & \nearrow i^* \\ & \tilde{K}^{n-1}(D^n) & \end{array}$$

Dies ist aber ein Widerspruch, da ja $\tilde{K}^{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ ist, aber $\tilde{K}^{n-1}(D^n) \cong \tilde{K}^{n-1}(pt) = 0$. \square

Bevor wir mit dem Beweis von Satz 5.1.2 beginnen, wollen wir mit Hilfe des Bott-Isomorphismus' $\tilde{\mu}$ noch die Ringstruktur von $\tilde{K}(S^{2m}) := \tilde{K}^0(S^{2m}) \cong \mathbb{Z}$ untersuchen.

Korollar 5.1.8. *Für $m \geq 1$ ist $\tilde{K}(S^{2m}) = \langle \beta_{2m} \rangle$ (als Ring) mit der einzigen Relation $\beta_{2m}^2 = 0$.*

BEWEIS:

Wir konstruieren einen Ringisomorphismus

$$\alpha_m : \underbrace{\tilde{K}(S^2) \otimes \dots \otimes \tilde{K}(S^2)}_{m\text{-mal}} \xrightarrow{\cong} \tilde{K}(S^{2m}).$$

Dann setzen wir

$$\beta_{2m} := \alpha_m(\underbrace{\beta_2 \otimes \dots \otimes \beta_2}_{m\text{-mal}}).$$

Die Behauptung folgt aus $\beta_2^2 = 0$.

Zur induktiven Konstruktion von α_m betrachte das folgende kommutative Dia-

gramm von Ringisomorphismen:

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{K}(S^n) \otimes \tilde{K}(S^2) & \xrightarrow[\cong]{\tilde{\mu}} & K((S^n, pt) \times (S^2, pt)) \\
 \cong \downarrow \text{Ausschn.} & & \cong \downarrow \text{Ausschn.} \\
 K(D^n, S^{n-1}) \otimes K(D^2, S^1) & \xrightarrow[\cong]{\cup} & K(D^n \times D^2, S^{n-1} \times D^2 \cup D^n \times S^1) \\
 & \searrow \text{dotted } \Phi_n & \cong \downarrow \varphi_n \\
 & & K(D^{n+2}, S^{n+1}) \\
 & & \cong \downarrow \text{Ausschn.} \\
 & & K(S^{n+2}, pt)
 \end{array}$$

φ_n ist der Isomorphismus, der von dem Homöomorphismus von Paaren $(D^{n+k}, S^{n+k-1}) \approx (D^n \times D^k, S^{n-1} \times D^k \cup D^n \times S^{k-1})$ (siehe z.B. [St-Zi, Beispiel 1.1.10]) induziert wird. \square

Beweisskizze zu Satz 5.1.2: Unser Beweis der Bott-Periodizität erfolgt durch explizite Konstruktion einer Inversen $\nu : K(X \times S^2) \rightarrow K(X) \otimes K(S^2)$. Da man die K -Theorie eines Raumes kennt, wenn man die Vektorraumbündel über diesem Raum im Griff hat, sollte man zunächst versuchen, die Vektorraumbündel über $X \times S^2$ zu verstehen. Deshalb überlegt man sich, daß es zu jedem Vektorraumbündel E über $X \times S^2$ ein Vektorraumbündel F über X und eine Klebefunktion $f : S^1 \rightarrow \text{AUT}(F)$ gibt, so daß E durch Verkleben von dem auf $X \times S^2_{\pm}$ zurückgezogenen Bündel F mit f entsteht. S^2_{\pm} bedeutet die obere und untere Halbkugel.

Dann zeigt man, daß man die Klebefunktion f o.B.d.A. als Polynom in $z \in S^1$ mit Koeffizienten in $\text{END}(F)$ annehmen kann, und zeigt, daß man durch den Übergang zur n -fachen Whitneysumme von F ($=: n \cdot F$) erreichen kann, daß die Klebefunktion ein lineares Polynom ist. Jetzt schließlich zeigt man, und das ist der Hauptschritt des Beweises, daß $n \cdot F$ in zwei Unterbündel aufspaltet, deren Summanden entweder mit der konstanten oder der Funktion $\cdot z$ verklebt werden können. In Termen dieser Unterbündel gibt man nun die Inverse ν zu μ an, zeigt, daß sie unabhängig von allen getroffenen Wahlen ist, und rechnet nach, daß es wirklich eine Inverse ist.

5.2 Vektorraumbündel über $X \times S^2$

Vorbemerkung: Die Sphäre S^2 zerlegt sich in die obere und untere Hemisphäre: $S^2 = S_+^2 \cup S_-^2$ mit $S_+^2 \cap S_-^2 = S^1$. Dabei fassen wir S^1 als Menge der komplexen Zahlen vom Betrag 1 auf. Diese Zerlegung überträgt sich natürlich auf $X \times S^2$, und man erhält

$$X \times S^2 = X \times S_+^2 \cup X \times S_-^2 \quad \text{mit} \quad X \times S_+^2 \cap X \times S_-^2 = X \times S^1.$$

Mit $\pi_{\pm} : X \times S_{\pm}^2 \rightarrow X$ und $\pi_{S^1} : X \times S^1 \rightarrow X$ bezeichnen wir die Projektionen. Ist nun ein Vektorraumbündel F über X und eine Abbildung $f : S^1 \rightarrow \text{AUT}(F)$ gegeben, so liefert die Konstruktion

$$\{F, f\} := \pi_+^* F \cup_f \pi_-^* F = \pi_+^* F \amalg \pi_-^* F /_{(z_+, v) \sim (z_-, f(z)v)}$$

ein Vektorraumbündel über $X \times S^2$. z_{\pm} bedeutet: $z_{\pm} \in S^1 \subset S_{\pm}^2$. Dabei wird die Faser von $\pi_+^* F$ über $(x, z_+) \in X \times S^1$ durch $f(z)$ mit der Faser von $\pi_-^* F$ über (x, z_-) identifiziert.

Lemma 5.2.1. *Sei E ein Vektorraumbündel über $X \times S^2$. Dann gilt*

- (i) *Es gibt ein Vektorraumbündel F über X und ein $f : S^1 \rightarrow \text{AUT}(F)$ mit $\{F, f\} \cong E$.*
- (ii) *Die Isomorphieklasse von $\{F, f\}$ hängt nur von der Homotopieklasse $[f]$ und der Isomorphieklasse von F ab.*
- (iii) *Sind $F, F' \in \text{Vect}(X)$, $A, B \in \text{ISO}(F, F')$, $f : S^1 \rightarrow \text{AUT}(F)$, so gilt*

$$\{F, f\} \cong \{F', B \circ f \circ A^{-1}\}.$$

- (iv) *Ist $\{F, f\} \cong_{\phi} \{F', f'\}$, so gibt es $A \in \text{ISO}(F, F')$ mit $f' \simeq A \circ f \circ A^{-1} : S^1 \rightarrow \text{AUT}(F')$.*

- (v) *Es gelten folgende Rechenregeln:*

$$\{F, f\} \oplus \{F', f'\} \cong \{F \oplus F', f \oplus f'\};$$

$$\{F, f\} \otimes \{F', f'\} \cong \{F \otimes F', f \otimes f'\}.$$

BEWEIS:

zu (i): Sei also $E \in \text{Vect}(X \times S^2)$ gegeben. Die Einschränkung von E auf $X \times \{1\} \subset X \times S^2$ liefert ein Bündel F über X . Da die Inklusion $i_{\pm} : X = X \times \{1\} \hookrightarrow X \times S_{\pm}^2$ eine Homotopieäquivalenz ist, gibt es Isomorphismen $u_{\pm} : E|_{X \times S_{\pm}^2} \rightarrow \pi_{\pm}^* F$. Da $E = E|_{X \times S_+^2} \cup_{\text{Id}|_{X \times S^1}} E|_{X \times S_-^2}$, folgt mit

$f := (u_- \circ u_+^{-1})|_{X \times S^1}$ die Isomorphie $E \cong \pi_+^* F \cup_f \pi_-^* F$. Nun fassen wir $f \in \text{AUT}(\pi_{S^1}^* F)$ als Abbildung $f : S^1 \rightarrow \text{AUT}(F)$ auf und sind fertig.

zu (ii): Dies folgt aus Lemma 2.16(iv).

zu (iii): Der Bündelisomorphismus $A \amalg B : \pi_+^* F \amalg \pi_-^* F \rightarrow \pi_+^* F' \amalg \pi_-^* F'$ faktorisiert durch die Relation und liefert einen Isomorphismus zwischen $\{F, f\}$ und $\{F', B \circ f \circ A^{-1}\}$.

zu (iv): Es folgt sofort: $F \cong \{F, f\}|_{X \times N} \cong \{F', f'\}|_{X \times N} \cong F'$ vermöge $A := \phi|_{X \times N} \in \text{ISO}(F, F')$, wobei $N := (0, 1) \in S^2 = \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid |z|^2 + t^2 = 1\}$. Nach Teil (iii) gilt $\{F, f\} \cong \{F', A \circ f \circ A^{-1}\} \cong_\psi \{F', f'\}$ mit $\psi := (A_+ \cup_f A_-) \circ \phi^{-1}$, wobei $A_\pm : \pi_\pm^* F \rightarrow \pi_\pm^* F'$ die von A induzierten Abbildungen sind. Wegen $\psi|_{X \times N} = \text{Id}$ nach Konstruktion genügt es nun, noch folgenden Spezialfall zu beweisen: $\{F, f\} \cong_\phi \{F, f'\}$ mit $\phi|_{X \times N} = \text{Id}$, so gilt: $f \simeq f' : S^1 \rightarrow \text{AUT}(F)$. Die Einschränkung $\phi|_{X \times S_+^2}$ können wir wegen $\{F, f\}|_{X \times S_+^2} \cong S_+^2 \times F$ als Abbildung $S_+^2 \rightarrow \text{AUT}(F)$ auffassen. Aus den Relationen in $\{F, f\}$ bzw. $\{F, f'\}$ ergibt sich für $z \in S^1$: $f'(z) = \phi(z) \circ f(z) \circ \phi^{-1}(z) \in \text{AUT}(F)$. Definiere nun $H : S^1 \times I \rightarrow \text{AUT}(F)$ vermöge $H_t(z) := \phi((tz, \sqrt{1-t^2})) \circ f(z) \circ \phi^{-1}((tz, \sqrt{1-t^2}))$. Dann folgt $H_0(z) = \phi(N) \circ f(z) \circ \phi^{-1}(N) = f(z)$ und $H_1(z) = \phi(z) \circ f(z) \circ \phi^{-1}(z) = f'(z)$, also $f \simeq_H f'$.

zu (v): Das folgt sofort aus der Konstruktion von $\{F, f\}$. \square

Definition 5.2.2 (Spezielle Klebefunktionen). Ist $F \in \text{Vect}(X)$ und $(A_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ eine Folge von Endomorphismen von F , so definiert

$$f_N := \sum_{|i| \leq N} A_i z^i : S^1 \longrightarrow \text{END}(F)$$

eine Abbildung von S^1 in die Endomorphismen von F . f_N heißt (endliche) Laurentreihe von Endomorphismen von F oder *Laurentreihe über F* . Ist $A_i = 0$ für $i < 0$, so heißt f_N *polynomial*. Ist $f_N(z) = Az + B$, so heißt f_N *linear*. Ist $f_N(z) \in \text{AUT}(F)$ für alle $z \in S^1$, so heißt f_N *regulär*.

Eine Homotopie $H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow \text{END}(F)$ zwischen zwei Klebefunktionen heißt *reguläre Homotopie*, wenn H_t für alle t regulär ist.

Ist also zum Beispiel ein $F \in \text{Vect}(X)$ und eine reguläre Laurentreihe f gegeben, so definiert $\{F, f\}$ ein Vektorraumbündel über $X \times S^2$.

Beispiel 5.2.3. Sei X ein Punkt, $f(z) = z = z \cdot \text{Id}$. Dann ist $\{1, f\}$ isomorph zum Hopfbündel H über $S^2 \approx \mathbb{C}P^1$. Das konjugierte Hopfbündel \bar{H} entsteht durch Verkleben mit $f(z) = z^{-1}$.

BEWEIS:

Wir benutzen folgenden Atlas von $S^2 = \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid |z|^2 + t^2 = 1\}$, $N := (0, 1)$, $S := (0, -1)$:

$$\begin{aligned} P_N : S^2 \setminus \{N\} &\longrightarrow \mathbb{C} : (z, t) \longmapsto \frac{z}{1-t}; \\ P_S : S^2 \setminus \{S\} &\longrightarrow \mathbb{C} : (z, t) \longmapsto \frac{z}{1+t}. \end{aligned}$$

Dies sind die kanonischen stereographischen Projektionen von N bzw. S aus. Die Kartenwechsel von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nach $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ sind gegeben durch

$$(*) \quad P_N \circ P_S^{-1} = P_S \circ P_N^{-1} : z \longmapsto \frac{1}{\bar{z}}$$

Man beachte, daß P_N und P_S auf $S^1 \subset S^2$ die Identität ist. Es ist $\mathbb{C}P^1 := \{[z_0 : z_1] \mid z_0, z_1 \in \mathbb{C}, |z_0| + |z_1| \neq 0\}$. Mittels P_N und P_S gibt es nun folgende Homöomorphismen:

$$\begin{array}{ccc} \phi_+ : \mathbb{C}P_+^1 := \{[z_0 : z_1] \in \mathbb{C}P^1 \mid z_0 \neq 0\} & \xrightarrow{\approx} & S^2 \setminus \{N\} \\ & \longmapsto & P_N^{-1}\left(\frac{z_1}{z_0}\right) \\ & \longleftarrow & p \\ & & [1 : \overline{P_N(p)}] \\ \phi_- : \mathbb{C}P_-^1 := \{[z_0 : z_1] \in \mathbb{C}P^1 \mid z_1 \neq 0\} & \xrightarrow{\approx} & S^2 \setminus \{S\} \\ & \longmapsto & P_S^{-1}\left(\frac{z_0}{z_1}\right) \\ & \longleftarrow & p \\ & & [P_S(p) : 1] \end{array}$$

Aus (*) folgt, daß ϕ_+ und ϕ_- auf $\mathbb{C}P_+^1 \cap \mathbb{C}P_-^1$ übereinstimmen. Wenn man die Trivialisierungen des Hopfbündels auf $\mathbb{C}P_+^1$ und $\mathbb{C}P_-^1$

$$\begin{array}{ccccc} T_+ : & H_{|\mathbb{C}P_+^1} & \longrightarrow & \mathbb{C}P_+^1 \times \mathbb{C} & \longrightarrow & S^2 \setminus \{N\} \times \mathbb{C} \\ & ([1 : z], \lambda(1, z)) & \longmapsto & ([1 : z], \lambda) & \longmapsto & (P_N^{-1}(\bar{z}), \lambda) \\ \\ T_- : & H_{|\mathbb{C}P_-^1} & \longrightarrow & \mathbb{C}P_-^1 \times \mathbb{C} & \longrightarrow & S^2 \setminus \{S\} \times \mathbb{C} \\ & ([z : 1], \mu(z, 1)) & \longmapsto & ([z : 1], \mu) & \longmapsto & (P_S^{-1}(z), \mu) \end{array}$$

auf $S^1 \subset \mathbb{C}P_+^1 \cap \mathbb{C}P_-^1$ einschränkt und die Kartenwechsel ausrechnet, erhält man

$$T_+ \circ T_-^{-1} : S^1 \times \mathbb{C} \longrightarrow S^1 \times \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} &\text{durch die Abbildungsvorschrift } (z, \lambda) = (P_S^{-1}(z), \lambda) \xrightarrow{T_-^{-1}} ([z : 1], \lambda(z, 1)) \\ &= ([1 : 1/z], z\lambda(1, 1/z)) \xrightarrow{T_+} (P_N^{-1}(\overline{1/z}), z\lambda) = (z, z\lambda). \end{aligned}$$

Also gilt $T_+ \circ T_-^{-1}(z) = z = z \cdot \text{Id} \in \text{AUT}(F)$. Es folgt, daß $T_- \circ T_+^{-1} : S^1 \times \mathbb{C} \rightarrow S^1 \times \mathbb{C}$ durch $(z, \lambda) \mapsto (z, \frac{1}{z}\lambda)$ gegeben ist. Nun folgt

$$H = H_{|S_+^2} \cup_{\text{Id}} H_{|S_-^2} \cong (S_+^2 \times \mathbb{C}) \cup_{T_+ \circ T_-^{-1}} (S_-^2 \times \mathbb{C}) = \pi_+^* 1 \cup_z \pi_-^* 1 = \{1, z\}.$$

Die Behauptung für \bar{H} folgt analog. □

Korollar 5.2.4 (Relationen des Hopfbündels).

Es gilt folgende Isomorphie von Vektorraumbündeln über S^2 :

$$H^2 \oplus 1 \cong H \oplus H$$

Damit folgt sofort die Relation $(H-1)^2 = 0 \in K(S^2)$. Genauso gilt $(\bar{H}-1)^2 = 0$.

BEWEIS:

Nach Beispiel 5.2.3 und Lemma 5.2.1 gelten die Isomorphismen

$$H^2 \oplus 1 \cong \left\{ 2, \begin{pmatrix} z^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}; \quad H \oplus H \cong \left\{ 2, \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \right\}.$$

Nun definiert aber

$$H_t(z) := \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}],$$

eine reguläre Homotopie zwischen den beiden Verklebeabbildungen, und damit sind die Bündel isomorph. \square

Lemma 5.2.5. Ist $F \in \text{Vect}(X)$ und $f : S^1 \rightarrow \text{AUT}(F)$ gegeben, dann gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$

$$\{F, f \cdot z^k\} \cong \{F, f\} \otimes \{1, z^k\} \quad \text{und} \quad \{F, z^k\} \cong F \hat{\otimes} H^k \cong F \hat{\otimes} \bar{H}^{-k}.$$

BEWEIS:

Mit den Rechenregeln aus Lemma 5.2.1 folgt

$$\begin{aligned} \{F, f \cdot z^k\} &\cong \pi_+^* F \cup_{f \cdot z^k} \pi_-^* F \\ &\cong \pi_+^* F \otimes 1 \cup_{f \otimes z^k} \pi_-^* F \otimes 1 \\ &\cong \{F, f\} \otimes \{1, z^k\}. \end{aligned}$$

Die zweite Relation folgt für $f = 1$ und wegen $\{F, 1\} \cong \pi_X^* F$, $\{1, z\} \cong \pi_{S^2}^* H$ (als Bündel über $X \times S^2$) aus der Definition des äußeren Tensorprodukts. Außerdem verwendet man noch $\bar{H} = H^{-1}$. \square

Bemerkung und Definition 5.2.6.

- (i) Ist F ein Vektorraumbündel über X , $A \in \text{END}(F)$ und g eine Riemannsche Metrik auf F , so kann man faserweise die Norm von A bilden. (Die Norm von A_x ist definiert als das Maximum der auf der Einheitskugel in F_x angenommenen Werte). Durch

$$\|A\| := \sup_{x \in X} \|A_x\|$$

wird $\text{END}(F)$ zu einem komplexen Banachraum. Man überlegt sich leicht, daß die zu verschiedenen Metriken gehörenden Normen äquivalent sind. $\text{AUT}(F)$ ist bezüglich dieser Norm eine offene Teilmenge in $\text{END}(F)$.

- (ii) Zwei reguläre Klebefunktionen $f, g : S^1 \rightarrow \text{AUT}(F)$ liegen *nah* beieinander, wenn für alle $z \in S^1$ die Verbindungsstrecke zwischen $f(z)$ und $g(z)$ noch ganz in $\text{AUT}(F)$ liegt. Dann sind f und g nämlich regulär homotop vermöge der linearen Homotopie $H_t(z) := tf(z) + (1-t)g(z)$.

Lemma 5.2.7 (Approximation durch Laurentreihen).

Sei F ein Vektorraumbündel über X und $f : S^1 \rightarrow \text{AUT}(F)$ eine reguläre Klebefunktion. Dann gibt es eine reguläre Laurentreihe g nah bei f . Insbesondere gilt $\{F, f\} \cong \{F, g\}$.

BEWEIS:

Wir bezeichnen mit

$$A_k := \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} z^{-k} f(z) \frac{dz}{z} \in \text{END}(F)$$

den k -ten Fourierkoeffizienten von f und setzen

$$S_n := \sum_{k=-n}^n A_k z^k.$$

Im allgemeinen gilt leider nicht, daß die Fourierreihe S_n gleichmäßig gegen f konvergiert. Aber es gilt für stetiges f der

Satz von Fejér:
$$f_n := \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n S_m \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{glm.}} f.$$

In der Standardliteratur der Analysis, z.B. [He], wird dieser Satz nur für skalarwertige Funktionen bewiesen. Man kann den Satz von Fejér aber ganz genauso für Banachraumwertige Funktionen $f : S^1 \rightarrow V$ (V Banachraum) beweisen.

Für große n ist also f_n nah bei f (Man beachte: $\text{dist}(f(S^1), \text{END}(F) \setminus \text{AUT}(F)) = \delta > 0$), und mit S_n ist natürlich auch f_n eine Laurentreihe. \square

5.3 Polynomiale und lineare Klebefunktionen

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, daß man o.B.d.A. annehmen kann, daß die Anklebeabbildung für ein Bündel über $X \times S^2$ durch eine reguläre Laurentreihe gegeben ist. Nun läßt sich jede reguläre Laurentreihe f vom Grad n in der Form $z^{-n}p$ schreiben, wobei p ein reguläres Laurentpolynom ist. Mit Lemma 5.2.1 folgt dann, daß $\{F, z^{-n}p\}$ und $\{F, p\} \otimes \{1, z^{-n}\}$ isomorph sind.

Deshalb versuchen wir zunächst, polynomiale Klebeabbildungen auf lineare zu reduzieren:

Definition 5.3.1. Sei $p(z) = \sum_{i=0}^n A_i z^i$ eine reguläre polynomiale Klebefunktion über $F \in \text{Vect}(X)$. Wir setzen

$$L^n(F) := \underbrace{F \oplus \cdots \oplus F}_{n+1};$$

$$\begin{aligned} L^n(p) : S^1 &\longrightarrow \text{END}(L^n(F)) \\ z &\longmapsto ((v_0, \dots, v_n) \mapsto (\sum A_i v_i, -z v_0 + v_1, \dots, -z v_{n-1} + v_n)). \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise heißt das

$$\begin{aligned} L^n(p) &= \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_{n-1} & A_n \\ -z & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & -z & 1 & \\ & & & -z & 1 \end{pmatrix} \\ &= z \cdot \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 0 & \\ & & & -1 & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_{n-1} & A_n \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dabei bedeuten die leeren Einträge 0. $L^n(p)$ ist also eine lineare Klebefunktion über $L^n(F)$.

Lemma 5.3.2. *Ist p ein reguläres Polynom von Grad $\leq n$ über F , so gilt mit den Bezeichnungen aus Definition 5.3.1*

- (i) $L^n(p)$ ist ein reguläres lineares Polynom über $L^n(F)$, und $\{F, p\} \oplus n \cdot \{F, 1\} \cong \{L^n(F), L^n(p)\}$;
- (ii) $\{L^{n+1}(F), L^{n+1}(p)\} \cong \{L^n(F), L^n(p)\} \oplus \{F, 1\}$;
- (iii) $\{L^{n+1}(F), L^{n+1}(zp)\} \cong \{L^n(F), L^n(p)\} \oplus \{F, z\}$.

BEWEIS:

Der Beweis dieses Lemmas läuft im wesentlichen so, daß man die Anklebeabbildungen auf beiden Seiten betrachtet und versucht, eine lineare reguläre Homotopie zwischen ihnen zu finden. Sei also $p(z) = \sum_{i=0}^n A_i z^i$ ein reguläres Polynom über F .

zu (i): Wir wollen zeigen, daß

$$\begin{pmatrix} p & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \hat{=} p \oplus n \cdot 1 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n \\ -z & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -z & 1 \end{pmatrix} \hat{=} L^n(p)$$

regulär homotop sind. Insbesondere ist dann $L^n(p)$ regulär. Definiere $p_r(z) := \sum_{i=r}^n A_i z^{i-r}$ (Dies liegt i.a. nicht in $\text{AUT}(F)$) und setze

$$\begin{aligned} L_t^n(p) &= \begin{pmatrix} p - t^{n+1}(p - A_0) & t^n A_1 & t^{n-1} A_2 & \cdots & t A_n \\ -tz & 1 & & & \\ & -tz & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -tz & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p & t^n p_1 & t^{n-1} p_2 & \cdots & t p_n \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -tz & 1 & & & \\ & -tz & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -tz & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da die beiden Faktoren für jedes $t \in [0, 1]$ regulär sind, ist $L_t^n(p)$ für jedes t regulär. Wegen $L_0^n(p) = p \oplus n \cdot 1$ und $L_1^n(p) = L^n(p)$ folgt die Behauptung.

zu (ii): Wir wollen zeigen, daß die Matrizen

$$\begin{pmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n & 0 \\ -z & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & -z & 1 & 0 \\ & & & -z & 1 \end{pmatrix} \hat{=} L^{n+1}(p) \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n & 0 \\ -z & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & -z & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{=} L^n(p) \oplus 1$$

regulär homotop sind. Die Homotopie

$$H_t(p) = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n & 0 \\ -z & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & -z & 1 & 0 \\ & & & -tz & 1 \end{pmatrix}$$

ist für alle $t \in [0, 1]$ regulär, wie man durch Entwickeln der Determinante nach der letzten Spalte sieht. Da $H_0(p) = L^n(p) \oplus 1$ und $H_1(p) = L^{n+1}(p)$, folgt die Behauptung.

zu (iii): Hier schließlich wollen wir zeigen, daß die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & A_0 & A_1 & \cdots & A_n \\ -z & 1 & & & \\ & -z & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -z & 1 \end{pmatrix} \hat{=} L^{n+1}(zp) \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} z & 0 & & & \\ 0 & A_0 & A_1 & \cdots & A_n \\ & -z & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -z & 1 \end{pmatrix} \hat{=} z \oplus L^n(p)$$

regulär homotop sind. Es gilt

$$L^{n+1}(zp) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z & -1 & & & \\ 0 & A_0 & A_1 & \dots & A_n \\ & -z & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -z & 1 \end{pmatrix}$$

Der erste Faktor ist regulär homotop zur Identität, der zweite ist analog zu Teil (ii) homotop zu $z \oplus L^n(p)$, und damit folgt die Behauptung. \square

Lemma 5.3.3. *Ist $p(z) = Az + B$ ein lineares reguläres Polynom über $G \in \text{Vect}(X)$, so gilt $G \cong G_+(p) \oplus G_-(p)$ mit Unterbündeln $G_+(p)$ und $G_-(p)$, die von p abhängen. Weiter gilt*

$$(i) \quad \{G, p\} \cong \{G_+(p), z\} \oplus \{G_-(p), 1\}.$$

$$(ii) \quad (G \oplus G')_{\pm}(p \oplus p') \cong G_{\pm}(p) \oplus G'_{\pm}(p').$$

(iii) *Ist p' linear regulär homotop zu $A \circ p \circ A^{-1}$ mit $A \in \text{ISO}(G, G')$, so gilt $G_{\pm}(p) \cong G_{\pm}(p')$.*

(iv) *Ist $p = 1$, so ist $G_+(1) \cong \{0\}$ und $G_-(1) = G$.*

Ist $p = z$, so ist $G_+(z) = G$ und $G_-(z) \cong \{0\}$. \square

Dieses Lemma ist das Herzstück des Beweises und wird später bewiesen.

Am Anfang dieses Paragraphen sind wir mit einem Bündel F über X und einer polynomialen Klebefunktion p vom Grad $\leq n$ gestartet. Durch Übergang zur $(n+1)$ -fachen Whitney-Summe $F \oplus \dots \oplus F$ konnten wir uns auf ein lineares Polynom $L^n(p)$ über $L^n(F)$ reduzieren, und Lemma 5.3.3 sagt nun aus, daß man ein Bündel mit linearem Polynom noch einfacher, nämlich nur mit den Klebefunktionen 1 und z , verkleben kann.

Wir fassen diese Resultate zusammen in

Notation 5.3.4. *Ist p ein reguläres Polynom vom Grad $\leq n$ über $F \in \text{Vect}(X)$. Dann ist nach Lemma 5.3.2 $L^n(p)$ ein reguläres, lineares Polynom über $L^n(F)$. Nach Lemma 5.3.3 spaltet $L^n(F)$ auf in*

$$L^n(F) = \underbrace{L^n(F)_+(L^n(p))}_{=: L_+^n(F,p)} \oplus \underbrace{L^n(F)_-(L^n(p))}_{=: L_-^n(F,p)}.$$

Korollar 5.3.5. *Ist p ein reguläres Polynom vom Grad $\leq n$ über $F \in Vect(X)$, so gilt*

$$(i) \quad L_+^{n+1}(F, p) \cong L_+^n(F, p);$$

$$L_-^{n+1}(F, p) \cong L_-^n(F, p) \oplus F.$$

$$(ii) \quad L_+^{n+1}(F, zp) \cong L_+^n(F, p) \oplus F;$$

$$L_-^{n+1}(F, zp) \cong L_-^n(F, p).$$

BEWEIS:

Nach Lemma 5.3.2 gilt

$$\{L^{n+1}(F), L^{n+1}(p)\} \cong \{L^n(F), L^n(p)\} \oplus \{F, 1\} \cong \{L^n(F) \oplus F, L^n(p) \oplus 1\}.$$

Also gilt nach Lemma 5.3.3 $L_{\pm}^{n+1}(F, p) \cong L_{\pm}^n(F, p) \oplus F_{\pm}(1)$. Wegen $F_+(1) = \{0\}$ und $F_-(1) = F$ folgt der erste Teil. Der zweite geht völlig analog. \square

5.4 Beweis der Bott-Periodizität

Nun können wir Satz 5.1.2 beweisen.

Sei $E \in Vect(X \times S^2)$. Nach Lemma 5.2.1 gibt es ein $F \in Vect(X)$ und ein $f : S^1 \rightarrow \text{AUT}(F)$ mit $E \cong \{F, f\}$. Sei nun N so groß, daß für $n \geq N$ alle Laurentreihen f_n aus Lemma 5.2.7 nah bei f liegen. Für $n \geq N$ ist $p_n := z^n f_n$ ein reguläres Polynom vom Grad $\leq 2n$. Mit den Bezeichnungen aus 5.3.5 definieren wir nun

$$\nu_n(f) := L_+^{2n}(F, p_n) \otimes (\bar{H}^{n-1} - \bar{H}^n) + F \otimes \bar{H}^n \in K(X) \otimes K(S^2).$$

Zeige: $\nu_{n+1}(f) = \nu_n(f)$ für $n \geq N$.

Da f_n und f_{n+1} beide nah bei f liegen, ist f_n regulär homotop zu f_{n+1} . Also ist auch $p_{n+1} = z^{n+1} f_{n+1}$ regulär homotop zu $z^{n+1} f_n = zp_n$. Damit folgt nun:

$$\begin{aligned} L_+^{2n+2}(F, p_{n+1}) &\cong L_+^{2n+2}(F, zp_n) && \text{nach 5.3.3(iii)} \\ &\cong L_+^{2n+1}(F, zp_n) && \text{nach 5.3.5(i)} \\ &\cong L_+^{2n}(F, p_n) \oplus F && \text{nach 5.3.5(ii)} \end{aligned}$$

Aus der Relation des Hopfbündels (Korollar 5.2.4) $(1 - \bar{H})^2 = 0$ folgt $(1 - \bar{H}) = (1 - \bar{H})\bar{H}$, also $(\bar{H}^{n-1} - \bar{H}^n)\bar{H} = (\bar{H}^{n-1} - \bar{H}^n)$. Also gilt

$$\begin{aligned}\nu_{n+1}(f) &= L_+^{2n+2}(F, p_{n+1}) \otimes (\bar{H}^n - \bar{H}^{n+1}) + F \otimes \bar{H}^{n+1} \\ &= (L_+^{2n}(F, p_n) \oplus F) \otimes (\bar{H}^n - \bar{H}^{n+1}) + F \otimes \bar{H}^{n+1} \\ &= L_+^{2n}(F, p_n) \otimes (\bar{H}^{n-1} - \bar{H}^n)\bar{H} + F \otimes \bar{H}^n \\ &= L_+^{2n}(F, p_n) \otimes (\bar{H}^{n-1} - \bar{H}^n) + F \otimes \bar{H}^n \\ &= \nu_n(f).\end{aligned}$$

$\nu_n(f)$ hängt also für großes n nur von f ab, und wir können dafür auch $\nu(f)$ schreiben. Sei g eine weitere Klebefunktion für E nah bei f . Die lineare Homotopie zwischen f und g liefert für großes n nach Lemma 5.3.3 (iii) einen Isomorphismus zwischen $L_+^{2n}(F, p_n)$ und $L_+^{2n}(F, q_n)$, denn es ergibt sich nach Konstruktion, daß $L^{2n}(p_n)$ und $L^{2n}(q_n)$ stückweise linear regulär homotop sind (vgl. Homotopie im Beweis zu 5.3.2(ii)). Demnach sind $\nu(f)$ und $\nu(g)$ gleich. Damit ist die Klasse von $\nu(f)$ in $K(X) \otimes K(S^2)$ auf $C(S^1, \text{AUT}(F))$ lokalkonstant und hängt somit nur von der Homotopieklasse $[f]$ ab.

Ist ferner $g(z) = A \circ f(z) \circ A^{-1}$ mit $A \in \text{AUT}(F)$, so gilt auch für die entsprechenden Polynome p_n (zu f) und q_n (zu g) $q_n = A \circ p_n \circ A^{-1}$, folglich gemäß Konstruktion (Definition 5.3.1) $L^{2n}(q_n) = (2n+1)A \circ L^{2n}(p_n) \circ (2n+1)A^{-1}$, wobei $(2n+1)A := \underbrace{A \oplus \dots \oplus A}_{(2n+1)\text{-mal}}$. Nach Lemma 5.3.3 (iii) ergibt sich auch in diesem

Fall $L_+^{2n}(F, p_n) \cong L_+^{2n}(F, q_n)$ und demnach $\nu(f) = \nu(g)$.

Insgesamt hängt $\nu(f)$ also nur von der Isomorphieklasse von E ab, da die Zuordnung $[E] \xrightarrow{\cong} \{F, f\} \rightarrow f$ nach Lemma 5.2.1 bis auf Homotopie und Konjugation mit Elementen aus $\text{AUT}(F)$ eindeutig ist.

Da ν nach Konstruktion additiv und wohldefiniert auch bzgl. stabiler Isomorphie ist, haben wir einen Homomorphismus von abelschen Gruppen $\nu : K(X \times S^2) \rightarrow K(X) \otimes K(S^2)$ gefunden. Aus der Bijektivität von ν folgt später dann auch, daß ν ein Ringhomomorphismus ist.

Zeige: $\mu \circ \nu = \text{Id}$ auf $K(X \times S^2)$.

Sei $E \cong \{F, f_n\} = \{F, z^{-n}p_n\} \stackrel{(5.2.5)}{\cong} \{F, p_n\} \otimes \{1, z^{-n}\}$ ein Vektorraumbündel über $X \times S^2$. Dann gilt

$$\mu \circ \nu(E) = L_+^{2n}(F, p_n) \hat{\otimes} (1 - \bar{H})\bar{H}^{n-1} + F \hat{\otimes} \bar{H}^n \quad \text{für großes } n. \quad (*)$$

Nun gilt nach Lemma 5.3.2(i) in $K(X \times S^2)$

$$\{F, p_n\} = \{L^{2n}(F), L^{2n}(p_n)\} - 2n\{F, 1\}, \quad (1)$$

man sofort mit dem Abbildungsgrad in Homologie oder π_1 sieht.

Zeige: $\nu \circ \mu = \text{Id}$ auf $K(X) \otimes K(S^2)$.

Da $K(S^2)$ von $\{1, \bar{H}\}$ erzeugt wird, genügt es, die Behauptung auf Elementen der Form $F \otimes \bar{H}$ und $F \otimes 1$ mit $F \in K(X)$ zu testen. Auf solchen gilt die Gleichheit aber nach Definition von ν . Zum Beispiel

$$\nu(\mu(F \otimes \bar{H})) = \nu(F \hat{\otimes} \bar{H}) \stackrel{5.2.5}{=} \nu(\{F, z^{-1}\}) = F \otimes \bar{H}.$$

Denn für $f = z^{-1}$ ist $f_n = \frac{n}{n+1}z^{-1}$, somit liegt bereits f_1 nahe bei f . Man kann also einfach $\nu_1(f)$ mit $p_1 = zf_1 = 1$ (bis auf Vorfaktor) nach der oben angegebenen Formel berechnen (Beachte: $L_+^2(F, 1) \cong \{0\}$ nach Lemma 5.3.3(iv)). Die Gleichheit $\nu(\mu(F \otimes 1)) = F \otimes 1$ folgt völlig analog. Damit ist Satz 5.1.2 bewiesen. \square

Beweis von Lemma 5.3.3

Sei $p(z) = Az + B : S^1 \rightarrow \text{AUT}(G)$ ein lineares, reguläres Polynom über $G \in \text{Vect}(X)$. Insbesondere ist $p(1) = A + B \in \text{AUT}(G)$. Wegen

$$p(z) = A(z - 1) + A + B = (A + B) \left(\underbrace{(A + B)^{-1}A}_{=: C} (z - 1) + \text{Id}_G \right)$$

und Lemma 5.2.1(iii) gilt mit $\tilde{p}(z) := C(z - 1) + \text{Id}_G$ die Isomorphie

$$\{G, p\} = \{G, (A + B)\tilde{p}\} \cong \{G, \tilde{p}\}.$$

Ist $0 \neq \lambda$ ein Eigenwert von $C_x \in \text{End}(G_x)$, so ist $(1 - z)\lambda \neq 1$ für alle $z \in S^1$. Aus $(1 - z_0)\lambda w = w$ für ein z_0 und ein $0 \neq w \in G_x$ folgt nämlich $\tilde{p}(z_0)w = 0$ im Widerspruch zu $\tilde{p}(z_0) \in \text{AUT}(G)$. Also folgt, daß $(\lambda - 1)/\lambda$ Betrag ungleich 1 hat. Das heißt aber, daß der Abstand von λ zu 0 ungleich dem Abstand von λ zu eins ist. Also liegt λ nicht auf der Geraden in \mathbb{C} mit Realteil $1/2$. Bezeichnen wir mit H_+ die Menge der komplexen Zahlen mit Realteil größer $1/2$, und H_- alle die mit Realteil kleiner $1/2$, so liegen also die Eigenwerte von C_x in $H_+ \cup H_-$.

Ist $f_x(t)$ das charakteristische Polynom von C_x , so gibt es eindeutige Polynome f_x^+ und f_x^- mit der Eigenschaft, daß $f_x = f_x^+ \cdot f_x^-$ und alle Nullstellen von f_x^\pm in H_\pm liegen (Setze $f_x^\pm := 1$, falls f_x keine Nullstellen in H_\pm besitzt).

Lemma 5.4.1. Die Funktionen $f^\pm : X \rightarrow \mathbb{C}[t]$, $x \mapsto f_x^\pm$, sind stetig. \square

Dieses Lemma beweisen wir später. Durch f^\pm können wir nun zwei Endomorphismen P^\pm von G faserweise definieren, indem wir P_x^\pm als $f_x^\pm(C_x)$ festsetzen. Da f^\pm stetig war, ist dies ein stetiger Schnitt in $\text{END}(G)$, also ein Bündelendomorphismus von G .

Nun definieren wir die Bündel G_+ und G_- faserweise durch $(G_\pm)_x := \text{Kern}(P_x^\pm) = \text{Bild}(P_x^\mp)$ (= direkte Summe der Haupträume zu den Eigenwerten von C_x in H^\pm). Elementare Eigenwerttheorie liefert also eine direkte Zerlegung $G_x = (G_+)_x \oplus (G_-)_x$. G_+ und G_- sind tatsächlich Unterbündel von G , wenn P^+ und P^- lokalkonstanten Rang haben. Dies ist hier erfüllt, denn es ist immer wahr, daß der Rang eines Endomorphismus' lokal nicht fällt. Da sich die Ränge von P^+ und P^- aber immer zur Dimension von G addieren, sind sie hier auch lokal nicht steigend.

Aus der Definition ist klar, daß die Bündel G_\pm C -invariant sind. Mit C_\pm bezeichnen wir die Einschränkung von C auf G_\pm , und durch $\tilde{p}_\pm(z) = \tilde{p}(z)|_{G_\pm} = C_\pm(z-1) + \text{Id}_{G_\pm}$ definieren wir zwei Endomorphismen von G_+ bzw. G_- .

Zeige: Ist $|z| \geq 1$, so ist $\tilde{p}_+(z) \in \text{AUT}(G_+)$, und für $|z| \leq 1$ ist $\tilde{p}_-(z)$ in $\text{AUT}(G_-)$.

Wir zeigen: $\tilde{p}_+(z)$ nicht invertierbar $\Rightarrow |z| < 1$: Ist nämlich $\tilde{p}_+(z)v = 0$ für ein $v \neq 0$, so ist sicherlich $z \neq 1$, denn $\tilde{p}_+(1) = \text{Id}_{G_+}$ ist regulär. Damit folgt dann aber aus $\tilde{p}_+(z)v = 0$, daß $\lambda := 1/(1-z)$ ein Eigenwert von C_+ ist. Also ist nach Konstruktion von C_+ der Abstand von λ zu 1 kleiner als der Abstand von λ zu 0, d.h.

$$1 > \frac{|1 - \frac{1}{1-z}|}{|\frac{1}{1-z}|} = |z|.$$

Analog zeigt man die Behauptung für \tilde{p}_- .

Zeige: $\{G_+, \tilde{p}_+\} \cong \{G_+, z\}$ und $\{G_-, \tilde{p}_-\} \cong \{G_-, 1\}$.

Setze $H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow \text{END}(G_+) : (z, t) \mapsto C_+(z-t) + t \cdot \text{Id}_{G_+}$. Es ist $H(z, t) \in \text{AUT}(G_+) \forall (z, t) \in S^1 \times [0, 1]$. Denn ist $t > 0$, so gilt

$$H(z, t) = t \left(C_+(z/t - 1) + \text{Id}_{G_+} \right) = t\tilde{p}_+(z/t).$$

Wegen $t \leq 1$ und $|z| = 1$ ist $|z/t| \geq 1$, und damit ist $\tilde{p}_+(z/t) \in \text{AUT}(G_+)$. Ist $t = 0$, so ist $H(z, 0) = zC_+ \in \text{AUT}(G_+)$, denn die Eigenwerte von C_+ liegen in H_+ , insbesondere sind sie nicht 0. Damit ist \tilde{p}_+ regulär homotop zu zC_+ , also gilt nach Lemma 5.2.1(iii)

$$\{G_+, \tilde{p}_+\} \cong \{G_+, zC_+\} \cong \{G_+, z\}.$$

Weiterhin gilt, daß die Homotopie $H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow \text{END}(G_-)$, $(z, t) \mapsto \tilde{p}_-(tz)$, regulär ist. $|tz|$ ist nämlich ≤ 1 . Damit ist \tilde{p}_- regulär homotop zu $\tilde{p}_-(0) = (-C_- + \text{Id}_{C_-}) \in \text{AUT}(G_-)$. Also folgt hier ganz genauso

$$\{G_-, \tilde{p}_-\} \cong \{G_-, -C_- + \text{Id}_{C_-}\} \cong \{G_-, 1\}.$$

Zusammenfassend gilt

$$\{G, p\} \cong \{G, \tilde{p}\} \cong \{G_+ \oplus G_-, \tilde{p}_+ \oplus \tilde{p}_-\} \cong \{G_+, z\} \oplus \{G_-, 1\}.$$

Da die Aufspaltung in G_\pm von p abhängt, schreiben wir $G_\pm(p)$. Die Eigenschaften (i), (ii) und (iv) aus der Behauptung folgen jetzt sofort aus der Konstruktion. Zur Eigenschaft (iii) beachte man, daß eine lineare reguläre Homotopie H zwischen p , $p(z) = Az + B$, und p' , $p'(z) = A'z + B'$, eine lineare Abbildung von S^1 in $\text{AUT}(\pi^*G)$ ($\pi : X \times I \rightarrow X$ die Projektion) induziert, nämlich

$$z \longrightarrow H_t(z) = \{tA + (1-t)A'\}z + \{tB + (1-t)B'\} \text{ ,, } \in \text{AUT}(\pi^*G)''.$$

Die Aufspaltung von π^*G bezüglich des linearen regulären Polynoms H liefert die Bündel $\pi^*(G)_\pm$, die auf dem oberen und unteren Deckel mit $G_\pm(p)$ bzw. $G_\pm(p')$ übereinstimmen. Nun orientiert man sich am Beweis des Satzes, daß die Pullbacks unter homotopen Abbildungen isomorph sind: Für festes $t \in I$ ist $H_t : S^1 \rightarrow \text{AUT}(G)$ ein reguläres lineares Polynom, und es gibt bei Einschränkung auf $X \times \{t\}$ einen offensichtlichen Isomorphismus zwischen $\pi^*(G)_\pm$ und $\pi^*(G_\pm(H_t))$. Da $X \times \{t\}$ abgeschlossen im kompakten Hausdorffraum $X \times I$ ist, sind die beiden Bündel nach Lemma 2.8 auf einem ganzen Streifen $X \times U_\delta(t)$ ($\delta > 0$) isomorph. (Hier geht ein, daß X kompakt ist.) Somit ist die Isomorphieklasse von $G_\pm(H_t) \in \text{Vect}(X)$ eine lokalkonstante Funktion von t . Da I zusammenhängend ist, folgt die Behauptung.

Im Falle $p' = D \circ p \circ D^{-1} : S^1 \rightarrow \text{AUT}(G)$ folgt die Isomorphie $G_\pm(p) \cong G_\pm(p')$ direkt aus der Konstruktion. \square

Beweis von Lemma 5.4.1:

Sei $\bar{P}_n := \{t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1t + a_0 \mid a_i \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}[t]$. Wir wählen für festes $\bar{x} \in X$ eine offene Umgebung U mit $\dim(C_x) = n$ für alle $x \in U$. Dann gilt $f(U) \subseteq \bar{P}_n$ (wobei $x \xrightarrow{f} f_x$).

Sublemma: Die Abbildung $\Phi_n : \bar{P}_n \rightarrow \mathbb{C}^n / \Sigma^n$ (Σ^n symmetrische Gruppe der Ordnung n), die $p \in \bar{P}_n$ den ungeordneten n -Tupel seiner komplexen Nullstellen zuordnet, ist stetig. Φ_n ist sogar ein Homöomorphismus mit der Inversen $[(z_1, \dots, z_n)] \mapsto \prod_{i=1}^n (t - z_i)$. \square

Damit hat man zunächst eine stetige Abbildung $U \xrightarrow{f} f(U) \xrightarrow{\Phi_n|_{f(U)}} \mathbb{C}^n / \Sigma^n$.

Sei für $x \in X$ $0 \leq k_x \leq n$ die Anzahl der Nullstellen von f_x mit Realteil $> 1/2$. Da die Abbildung $\mathbb{C}^n/\Sigma^n \rightarrow \mathbb{N}_0$, $[(z_1, \dots, z_n)] \mapsto |\{z_i | \operatorname{Re}(z_i) > 1/2\}|$, in einem Punkt $[(z_1, \dots, z_n)]$ mit $\operatorname{Re}(z_i) \neq 1/2$ für alle i (Dies ist für $\Phi_n(f_x)$, $x \in X$, nach Voraussetzung erfüllt) lokal konstant ist, findet man eine offene Umgebung $V \subseteq U$ von \bar{x} mit $k_x = k_{\bar{x}} =: k$ für $x \in V$.

Sei $\mathbb{C}^n/\Sigma^n \supseteq \Phi_n(f(V)) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{C}^k/\Sigma^k$ die - wie man sich leicht überlegt - stetige Abbildung, die $[(z_1, \dots, z_n)]$ auf den ungeordneten k -Tupel der z_i mit $\operatorname{Re}(z_i) > 1/2$ wirft. Dann ergibt sich die Funktion f^+ bei Einschränkung auf V als Kompositum stetiger Abbildungen, nämlich

$$f^+_{|V} = \left(V \xrightarrow{f|_V} f(V) \xrightarrow{\Phi_n|_{f(V)}} \Phi_n(f(V)) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{C}^k/\Sigma^k \xrightarrow{\Phi_k^{-1}} \bar{P}_k \right),$$

und damit ist sie stetig. Der Beweis für f^- geht analog. \square

Beweis des Sublemmas: Sei $p(t) = t^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i \in \bar{P}_n$. Sei $r := 1 + |a_{n-1}| + \dots + |a_0|$. Für $t \in \mathbb{C}$ mit $|t| > r$ gilt die Abschätzung $|p(t)| > 0$, denn

$$\tilde{p}(t) := |a_{n-1}| |t|^{n-1} + \dots + |a_1| |t| + |a_0| \underset{|t| \geq 1}{\leq} (|a_{n-1}| + \dots + |a_0|) |t|^{n-1} = (|t| - 1) |t|^{n-1} < |t|^n.$$

Damit folgt

$$|p(t)| \geq |t|^n - \tilde{p}(t) > 0.$$

Aus dieser Abschätzung folgt zunächst, daß das Bild einer kompakten Menge in \bar{P}_n unter Φ_n beschränkt in \mathbb{C}^n/Σ^n ist. Ist also $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Polynomen, die in \bar{P}_n gegen p konvergiert, so liegt das Bild der Folge $(p_k)_k$ und von p unter Φ in einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{C}^n/\Sigma^n$. Nun ist aber $\Phi_{n|K}^{-1} : K \rightarrow \Phi_n^{-1}(K)$ eine stetige bijektive Abbildung zwischen kompakten Hausdorffräumen und somit ein Homöomorphismus. Insbesondere folgt somit $\Phi_n(p_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \Phi_n(p)$. \square

Kapitel 6

Thom-Isomorphismus

6.1 Beweis des Thom-Isomorphismus'

Definition 6.1.1 (Diskbündel, Sphärenbündel).

Sei $p : E \rightarrow X$ ein Vektorraumbündel über dem kompakten Raum X und g eine Riemannsche Metrik auf E . Definiere das *Diskbündel* $D(E)$ von E als den Teilraum der Punkte $(x, v) \in E$ ($x \in X, v \in E_x$) mit $g_x(v, v) \leq 1$. Entsprechend sei das *Sphärenbündel* $S(E)$ von E der Teilraum der Punkte $(x, v) \in E$ mit $g_x(v, v) = 1$.

$D(E)$ und $S(E)$ sind kompakt, und $(D(E), S(E))$ ist ein Ko-Raumpaar im Sinne von Definition 1.4. Dies folgt im wesentlichen daraus, daß (D^{2n}, S^{2n-1}) ein Ko-Raumpaar ist. Wer es genauer wissen will, sollte [Wh, Ch. I, (5.1)] lesen und die dort stehende Charakterisierung (1) für Kofaserungen zunächst für (D^{2n}, S^{2n-1}) beweisen und den Beweis dann einfach „faserweise“ auf $(D(E), S(E))$ übertragen.

Definition 6.1.2 (Thom-Klasse, Thom-Homomorphismus).

- (i) Sei $p : E \rightarrow X$ ein n -dimensionales Vektorraumbündel über dem kompakten Raum X . Sei $p_D := p|_{D(E)}$. Betrachte den VRB-Kokettenkomplex $(\Lambda p_D^* E, \delta)$ über dem Ko-Raumpaar $(D(E), S(E))$, der über jedem $v \in D(E)$ die folgende Gestalt hat:

$$0 \longrightarrow \Lambda^0 E_{p(v)} \xrightarrow{v \wedge} \Lambda^1 E_{p(v)} \xrightarrow{v \wedge} \Lambda^2 E_{p(v)} \xrightarrow{v \wedge} \dots \xrightarrow{v \wedge} \Lambda^n E_{p(v)} \longrightarrow 0.$$

Dabei bezeichnet $\Lambda^i E_{p(v)}$ die i -te äußere Potenz des endlichen Vektorraumes $E_{p(v)}$ und $v \wedge$ das äußere Produkt mit dem Element $v \in E_{p(v)}$. Man kann leicht überprüfen, daß diese Sequenz für alle v außerhalb des Nullschnittes von E exakt ist.

- (ii) Wir fassen $(\Lambda p_D^* E, \delta)$ nun als VRB-Kettenkomplex über $(D(E), S(E))$ auf, indem wir $C_{-i} := \Lambda^i p_D^* E$, $c_{-i} := \delta^i$ ($0 \leq i \leq n$) setzen. In diesem Sinne können wir den Isomorphismus $b : K(X, A)^c \rightarrow K(X, A)$

(siehe Lemma 4.1.5) auf $(\Lambda p_D^* E, \delta)$ anwenden. Definiere also für das Vektorraumbündel E über X seine *Thom-Klasse* λ_E als das Element

$$\lambda_E := b([\Lambda p_D^* E, \delta]) \in K^0(D(E), S(E)).$$

(iii) Der *Thom-Homomorphismus* T_E ist das Kompositum

$$T_E : K^*(X) \xrightarrow[\cong]{p_D^*} K^*(D(E)) \xrightarrow{\cdot \lambda_E} K^*(D(E), S(E)),$$

wobei die zweite Abbildung aus der Multiplikation mit der Thom-Klasse besteht. (Hierbei wird die $K^*(D(E))$ -Modulstruktur von $K^*(D(E), S(E))$ verwendet.) Die Abbildung p_D^* ist ein Isomorphismus wegen Homotopieinvarianz, denn $X \approx \{\text{Nullschnitt}\} \subset D(E)$ ist strenger Deformationsretrakt von $D(E)$.

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, daß der Thom-Homomorphismus ein Isomorphismus ist. Dazu führen wir ihn in mehreren Schritten auf den Bott-Isomorphismus zurück. Daher ist folgendes Beispiel von Bedeutung:

Beispiel 6.1.3. Wir betrachten Definition 6.1.2 im Falle $X = \{pt\}$, $E = \mathbb{C}$. Also ist $(D(E), S(E)) = (D^2, S^1) \subset (\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Der in 6.1.2 definierte VRB-Kettenkomplex hat somit die Gestalt

$$0 \longrightarrow \overset{\text{Dim. } 0}{D^2 \times \mathbb{C}} \xrightarrow{\delta} \overset{\text{Dim. } -1}{D^2 \times \mathbb{C}} \longrightarrow 0 \quad \text{mit} \quad \delta(z, w) := (z, z \cdot w).$$

Somit ist $\lambda_{\mathbb{C}} = b([0 \rightarrow D^2 \times \mathbb{C} \xrightarrow{\delta} D^2 \times \mathbb{C} \rightarrow 0]) = [1, \bar{z}, 1] \in K(D^2, S^1)$, wobei „ \bar{z} “ faserweise Multiplikation mit $\bar{z} = z^{-1}$ ($z \in S^1$) bedeutet (vgl. Def. von b in Lemma 4.1.5).

Nun betrachten wir folgendes Push-Out (wobei wir $S_{\pm}^2 \subset S^2$ wie im letzten Kapitel auffassen):

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{i_1} & S_-^2 \\ i_2 \downarrow & & \downarrow j_1 \\ S_+^2 & \xrightarrow{j_2} & S^2 \end{array}$$

Nach Satz 3.13 gibt es also einen Ausschneidungsisomorphismus

$$\alpha : K(S^2, pt) \xrightarrow{\cong} K(S^2, S_+^2) \xrightarrow[\cong]{j_1^*} K(S_-^2, S^1) \xrightarrow{\cong} K(D^2, S^1)$$

mit

$$\alpha(\beta_2) = -[1, \bar{z}, 1] = \lambda_{\mathbb{C}}.$$

Zur Begründung der letzten Gleichung: Nach Beispiel 5.2.3 gilt für das Hopfbündel

$$H = \{1, z\} := S_+^2 \times \mathbb{C} \amalg S_-^2 \times \mathbb{C} /_{(z,v) \sim (z,zv)}, z \in S^1.$$

Es gilt $\beta_2 = 1 - H = [H, 1]$. Nun ist aber $j_1^*([H, \text{Id}_{|S_+^2}, 1]) = [1, \bar{z}, 1]$, denn folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} S_-^2 \times \mathbb{C} \supset S^1 \times \mathbb{C} & \hookrightarrow & S_+^2 \times \mathbb{C} \subset S^2 \times \mathbb{C} \\ & \uparrow (z,v) \mapsto (z, \bar{z} \cdot v) & \uparrow \text{Id} & & \\ H|_{S_-^2} \supset H|_{S^1} & \hookrightarrow & H|_{S_+^2} \subset H \end{array}$$

Das Beispiel wird in Beispiel 6.1.6 fortgesetzt.

Bemerkung und Definition 6.1.4 (Euler-Klasse).

Sei $\sigma : X \hookrightarrow D(E) \subset (D(E), S(E))$ der Nullschnitt. Es ist $p_D \circ \sigma = \text{Id}_X$, also gilt für den auf den Nullschnitt zurückgezogenen VRB-Kettenkomplex

$$\begin{aligned} \sigma^*[\Lambda p_D^* E, \delta] &= [\Lambda E, 0] \\ &:= [0 \longrightarrow \Lambda^0 E \xrightarrow{0} \Lambda^1 E \xrightarrow{0} \dots \xrightarrow{0} \Lambda^n E \longrightarrow 0] \in K(X)^c. \end{aligned}$$

Nun ziehen wir die Thom-Klasse λ_E von E auf den Nullschnitt zurück und erhalten, da b natürlich ist, nach Definition von b

$$\begin{aligned} \sigma^*(\lambda_E) &= \sigma^*(b([\Lambda p_D^* E, \delta])) \\ &= b(\sigma^*[\Lambda p_D^* E, \delta]) \\ &= b([\Lambda E, 0]) \\ &= [\bigoplus_k \Lambda^{2k+1} E, \bigoplus_k \Lambda^{2k} E] \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i [0, \Lambda^i E] \in K^0(X). \end{aligned}$$

Die Klasse $\chi_E := \sum_{i=0}^n (-1)^i \Lambda^i E = \sum_{i=0}^n (-1)^i [0, \Lambda^i E] \in K^0(X)$ heißt *Euler-Klasse von E* . Durch Restriktion der Thom-Klasse eines Vektorraumbündels auf den Nullschnitt erhält man also die Euler-Klasse des Bündels.

Wir kommen nun zum Hauptsatz dieses Kapitels:

Satz 6.1.5 (Thom-Isomorphismus). *Für jedes Vektorraumbündel $p : E \rightarrow X$ über einem kompakten Raum X ist der Thom-Homomorphismus*

$$T_E : K^*(X) \xrightarrow{\cong} K^*(D(E), S(E))$$

ein Isomorphismus.

Mit anderen Worten: $K^*(D(E), S(E))$ ist ein freier $K^*(X)$ -Modul vom Rang 1 mit der Thom-Klasse λ_E als Erzeuger. \square

Beispiel 6.1.6. Im Falle $X = \{pt\}$, $E = \mathbb{C}$ ist obige Aussage klar. Dann gilt nach Beispiel 6.1.3

$$\lambda_{\mathbb{C}} = \alpha(\beta_2) \in K(D^2, S^2),$$

und der Thom-Homomorphismus $T_{\mathbb{C}}$ ist (bis auf den Ausschneidungsisomorphismus α) nichts anderes als der Bott-Isomorphismus aus Bemerkung 5.1.3, denn folgendes Diagramm kommutiert (vgl. Beispiel 6.1.3; beachte die \mathbb{Z} -Modulstruktur von $K^*(X)$):

$$\begin{array}{ccc} T_{\mathbb{C}} : K^*(pt) & \xrightarrow{x \rightarrow x \cup \lambda_{\mathbb{C}}} & K^*(D^2, S^1) \\ \parallel & & \cong \uparrow \alpha \\ \tilde{\mu} : K^*(pt) & \xrightarrow[x \cong]{x \rightarrow x \cup \beta_2} & K^*(S^2, pt) \end{array}$$

Wir werden den allgemeinen Fall letztlich hierauf zurückführen. Dazu benötigen wir zunächst eine Rechenregel.

Lemma 6.1.7. Seien $p : E \rightarrow X$ und $q : E' \rightarrow X'$ Vektorraumbündel über den kompakten Hausdorffräumen X und X' . Seien $\pi_X : X \times X' \rightarrow X$, $\pi_{X'} : X \times X' \rightarrow X'$ die kanonischen Projektionen und $E \hat{\otimes} E' := \pi_X^* E \oplus \pi_{X'}^* E'$, also ein Vektorraumbündel über $X \times X'$. Dann gilt für die Thom-Klassen die Beziehung

$$\lambda_{E \hat{\otimes} E'} = \lambda_E \cup \lambda_{E'}.$$

BEWEIS:

Nach Definition des äußeren Produktes in Korollar 4.2.3 gilt

$$\begin{aligned} \lambda_E \cup \lambda_{E'} &= b([\Lambda p_D^* E, \delta]) \cup b([\Lambda p_{D'}^* E', \delta']) \\ &= b([\Lambda p_D^* E \otimes \Lambda p_{D'}^* E', \delta \otimes \text{Id}' + \text{Id} \otimes \delta']). \end{aligned}$$

Daher ist zu zeigen

$$\lambda_{E \hat{\otimes} E'} = [\Lambda p_D^* E \otimes \Lambda p_{D'}^* E', \delta \otimes \text{Id}' + \text{Id} \otimes \delta'] \in K((D(E), S(E)) \times (D(E'), S(E')))^c.$$

Nach Definition 4.2.1 ist

$$(\Lambda p_D^* E \otimes \Lambda p_{D'}^* E')_k = \bigoplus_{i+j=k} \Lambda^i p_D^* E \hat{\otimes} \Lambda^j p_{D'}^* E'.$$

Sei $x \in X$, $y \in X'$. Es ist $(E \hat{\oplus} E')_{(x,y)} \cong E_x \oplus E'_y$. Seien weiter $v \in E_x$, $w \in E'_y$ mit $(v, w) \in D(E_x \oplus E'_y) \approx D(E_x) \times D(E'_y)$. Dann hat $\Lambda p_D^*(E \hat{\oplus} E')$ über (v, w) die Gestalt

$$0 \longrightarrow \Lambda^0(E_x \oplus E'_y) \xrightarrow{(v+w)^\wedge} \Lambda^1(E_x \oplus E'_y) \xrightarrow{(v+w)^\wedge} \dots \xrightarrow{(v+w)^\wedge} \Lambda^n(E_x \oplus E'_y) \longrightarrow 0.$$

Die Behauptung folgt, weil folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^k(E_x \oplus E'_y) & \xleftarrow[\cong]{\wedge} & \bigoplus_{i+j=k} \Lambda^i(E_x) \otimes \Lambda^j(E'_y) \\ \downarrow (v+w)^\wedge & & \downarrow (\delta \otimes \text{Id}' + \text{Id} \otimes \delta')_k \\ \Lambda^{k+1}(E_x \oplus E'_y) & \xleftarrow[\cong]{\wedge} & \bigoplus_{i+j=k+1} \Lambda^i(E_x) \otimes \Lambda^j(E'_y) \end{array}$$

Seien nämlich $a \in \Lambda^i(E_x)$, $b \in \Lambda^j(E'_y)$ mit $i + j = k$. Dann wird $a \otimes b \in \Lambda^i(E_x) \otimes \Lambda^j(E'_y)$ unter den obigen Abbildungen wie folgt abgebildet (Beachte: $x \wedge y = (-1)^{ij} y \wedge x$ für $x \in \Lambda^i(V)$, $y \in \Lambda^j(V)$):

$$\begin{array}{ccc} a \wedge b & \longleftarrow & a \otimes b \\ \downarrow & & \downarrow \\ (v+w) \wedge a \wedge b & \longleftarrow & (v \wedge a) \otimes b + (-1)^i a \otimes (w \wedge b) \end{array}$$

□

Beweis von Satz 6.1.5:

1. Schritt: Sei $Y \subset X$ abgeschlossen und $E|_Y \cong Y \times \mathbb{C}^n$. Folglich ist $(D(E|_Y), S(E|_Y)) \approx (Y \times D(\mathbb{C}^n), Y \times S(\mathbb{C}^n)) = (Y \times D^{2n}, Y \times S^{2n-1})$.

Die Thom-Klasse des Nullbündels ist definitionsgemäß stets 1 (Beachte: $\Lambda^0(\{0\}) := \mathbb{C}$, $\Lambda^k(\{0\}) = 0$, $k \geq 1$). Sei $\lambda_n \in K(D(\mathbb{C}^n), S(\mathbb{C}^n))$ die Thom-Klasse von $\{pt\} \times \mathbb{C}^n$. Wegen $Y \times \mathbb{C}^n \cong (\{pt\} \times \mathbb{C}^n) \hat{\oplus} (Y \times \{0\})$ folgt aus dem vorigen Lemma

$$\lambda_{E|_Y} = \lambda_n \cup 1 = \lambda_1^n \cup 1.$$

Folgendes Diagramm kommutiert demnach (Für die rechte Hälfte des Diagramms verwende die Rechenregel in Lemma 4.2.6.):

(Identifiziere $(D(\mathbb{C}^n), S(\mathbb{C}^n)) \approx (D(\mathbb{C}), S(\mathbb{C}))^n$;

$$K(X, A)^n := \underbrace{K(X, A) \otimes \dots \otimes K(X, A)}_{n\text{-mal}}$$

$$\begin{array}{ccccc}
K^*(Y) \otimes K(D(\mathbb{C}), S(\mathbb{C}))^n & \xrightarrow[\text{(Kor. 5.1.8)}]{\cong} & K^*(Y) \otimes K(D(\mathbb{C}^n), S(\mathbb{C}^n)) & \xrightarrow[\cup]{\cong} & K^*(Y \times D(\mathbb{C}^n), Y \times S(\mathbb{C}^n)) \\
\uparrow \text{Id} \otimes (\cdot \lambda_1)^n & & \uparrow \text{Id} \otimes (\cdot \lambda_n) & & \uparrow T_{E|_Y} \cdot (1 \cup \lambda_n) \\
K^*(Y) \otimes K(D(\mathbb{C}))^n & \xrightarrow[\cong]{} & K^*(Y) \otimes K(D(\mathbb{C}^n)) & \xrightarrow[\cup]{\cong} & K^*(Y \times D(\mathbb{C}^n))
\end{array}$$

Somit genügt es zu zeigen, daß $\lambda_1 =: \lambda_{\mathbb{C}}$ ein Erzeuger von $K^*(D(\mathbb{C}), S(\mathbb{C}))$ als $K^*(D(\mathbb{C}))$ -Modul ist. Das haben wir uns aber schon in Beispiel 6.1.6 überlegt.

2. Schritt: Sei o.B.d.A. X zusammenhängend und $\{U_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ eine offene Überdeckung von X mit $E|_{U_i} \cong U_i \times \mathbb{C}^n$. Setze $B_m := X$. Nach dem folgenden Lemma gibt es für $i = m, m-1, \dots, 1$ in X abgeschlossene Teilmengen A_i, B_{i-1} mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $A_i \subset U_i, A_i \subset B_i, m \geq i \geq 1$;
- (ii) $B_{i-1} \subset U_1 \cup \dots \cup U_{i-1}, B_{i-1} \subset B_i, m \geq i \geq 1$;
- (iii) $\text{Int}_{B_i}(A_i) \cup \text{Int}_{B_i}(B_{i-1}) = B_i$.

(Beachte noch, daß $B_0 = \emptyset$ ist.)

Wir zeigen jetzt per Induktion nach i , daß $T_{E|_Z}$ für jeden abgeschlossenen Teilraum $Z \subset B_i$ ein Isomorphismus ist. Trivialerweise gilt das für $B_0 = \emptyset$. Sei dies nun auch für B_{i-1} richtig ($1 \leq i \leq m$). Für $Z \subset B_i$ gilt

$$\begin{aligned}
Z &= Z \cap B_i = (Z \cap \text{Int}_{B_i}(A_i)) \cup (Z \cap \text{Int}_{B_i}(B_{i-1})) \\
&= \text{Int}_Z(Z \cap A_i) \cup \text{Int}_Z(Z \cap B_{i-1}).
\end{aligned}$$

Für $M \subset X$ verwenden wir der Einfachheit halber die Abkürzungen

$$\begin{aligned}
M^D &:= p_D^{-1}(M) = D(E|_M) = D(E)|_M; \\
M^S &:= S(E|_M) = S(E)|_M; \\
M^{(D,S)} &:= (D(E)|_M, S(E)|_M).
\end{aligned}$$

Durch einen ähnlichen Schluß wie oben ergibt sich auch

$$\begin{aligned}
Z^D &= \text{Int}_{Z^D}((Z \cap A_i)^D) \cup \text{Int}_{Z^D}((Z \cap B_{i-1})^D); \\
Z^S &= \text{Int}_{Z^S}((Z \cap A_i)^S) \cup \text{Int}_{Z^S}((Z \cap B_{i-1})^S).
\end{aligned}$$

Nach Induktionsannahme sind $T_{E|Z \cap B_{i-1}}$ und $T_{E|Z \cap B_{i-1} \cap A_i}$ Isomorphismen, $T_{E|Z \cap A_i}$ ist nach dem 1. Schritt ein Isomorphismus. Man kann sich leicht überlegen, daß der Thom-Homomorphismus mit den Abbildungen der (relativen) Mayer-Vietoris-Sequenz verträglich ist. Somit kommutiert folgendes Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & K^{-n-1}(Z \cap B_{i-1} \cap A_i) & \xrightarrow{\partial} & K^{-n}(Z) & \longrightarrow & K^{-n}(Z \cap A_i) \oplus K^{-n}(Z \cap B_{i-1}) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow \cong & & \downarrow T_{E|Z} & & \downarrow \cong & & \\
 & & T_{E|Z \cap B_{i-1} \cap A_i} & & & & T_{E|Z \cap A_i} \oplus T_{E|Z \cap B_{i-1}} & & \\
 \dots & \longrightarrow & K^{-n-1}((Z \cap B_{i-1} \cap A_i)^{(D,S)}) & \xrightarrow{\partial} & K^{-n}(Z^{(D,S)}) & \longrightarrow & K^{-n}((Z \cap A_i)^{(D,S)}) \oplus K^{-n}((Z \cap B_{i-1})^{(D,S)}) & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Die Behauptung ergibt sich durch wiederholte Anwendung des Fünfer-Lemmas. \square

Lemma 6.1.8. *Sei X ein kompakter Hausdorffraum und $\{U_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ eine offene Überdeckung von X . Setze $B_m := X$. Dann gibt es für $i = m, m-1, \dots, 1$ in X abgeschlossene Teilmengen A_i, B_{i-1} mit folgenden Eigenschaften:*

- (i) $A_i \subset U_i, A_i \subset B_i, m \geq i \geq 1$;
- (ii) $B_{i-1} \subset U_1 \cup \dots \cup U_{i-1}, B_{i-1} \subset B_i, m \geq i \geq 1$;
- (iii) $\text{Int}_{B_i}(A_i) \cup \text{Int}_{B_i}(B_{i-1}) = B_i$.

(Beachte noch, daß $B_0 = \emptyset$ ist.)

BEWEIS:

Ein kompakter Hausdorffraum ist parakompakt (siehe z.B. [Schu, I.8.5-8.7.]). Sei also $\{\psi_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ eine der Überdeckung $\{U_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ untergeordnete Zerlegung der Eins. Setze

$$\begin{aligned}
 A_m &:= \psi_m^{-1}([\frac{1}{m+1}, 1]) \subset U_m; \\
 B_{m-1} &:= \bigcup_{i=1}^{m-1} \psi_i^{-1}([\frac{1}{m+1}, 1]) \subset \bigcup_{i=1}^{m-1} U_i.
 \end{aligned}$$

Offenbar sind A_m und B_{m-1} in X abgeschlossen. ferner gilt

$$X = \psi_m^{-1}([\frac{1}{m+1}, 1]) \cup \bigcup_{i=1}^{m-1} \psi_i^{-1}([\frac{1}{m+1}, 1]),$$

denn für jedes $x \in X$ muß es mindestens ein i mit $\psi_i(x) > \frac{1}{m+1}$ geben wegen $\sum_{i=1}^m \psi_i(x) = 1$.

Wegen $\psi_m^{-1}((\frac{1}{m+1}, 1]) \subset \text{Int}_X(A_m)$, $\bigcup_{i=1}^{m-1} \psi_i^{-1}((\frac{1}{m+1}, 1]) \subset \text{Int}_X(B_{m-1})$ folgt auch

$$\text{Int}_X(A_m) \cup \text{Int}_X(B_{m-1}) = B_m = X.$$

Jetzt verfährt man induktiv wie folgt: Setze $X' := B_{m-1}$, $U'_i := U_i \cap B_{m-1}$ ($1 \leq i \leq m-1$). Wähle eine der Überdeckung $\{U'_i \mid 1 \leq i \leq m-1\}$ von X' untergeordnete Zerlegung der Eins, und verfare dann wie gehabt. \square

6.2 Berechnung des Ringes $K^*(\mathbb{C}P^n)$

Als Anwendung des Thom-Isomorphismus' wollen wir für die komplexen projektiven Räume $\mathbb{C}P^n$ den Ring $K^*(\mathbb{C}P^n)$ berechnen (was leider nicht ganz einfach ist). Wir lehnen unseren Beweis an [Ka, Chap. IV.2] an.

Definition 6.2.1 (Projektives Bündel, kanonisches Linienbündel).

Sei $p : V \rightarrow X$ ein $n+1$ -dimensionales Vektorraumbündel über dem kompakten Hausdorffraum X .

- (i) Das zu V assoziierte *projektive Bündel* $P(V)$ sei das Faserbündel über X , dessen Faser über $x \in X$ gerade der komplexe projektive Raum $P(V_x) \cong \mathbb{C}P^n$ ist. Die Topologisierung von $P(V)$ erfolgt „kartenweise“ über einen Bündelatlas von V (siehe z.B. [Ka, Ch. I, 4.3 und Lemma 4.4]). Lokal gilt $P(V)|_U \cong U \times \mathbb{C}P^n$ ($U \subset X$). Man kann $P(V)$ auch als Quotientenraum von $S(V)$ unter der kanonischen S^1 -Operation definieren. $P(V)$ ist kompakt. Für $0 \neq v \in V$ bezeichnen wir mit $[v]$ die Klasse des von v erzeugten eindimensionalen Raumes in $P(V)$.
- (ii) Das *kanonische Linienbündel* ξ_V über $P(V)$ ist das eindimensionale Vektorraumbündel, das über $[v] \in P(V)$ den von v aufgespannten eindimensionalen Vektorraum als Faser hat. Die Topologie von ξ_V ergibt sich wieder über Bündelkarten. ξ_V ist auch ein Faserbündel über X (aber natürlich kein Vektorraumbündel), und lokal gilt $\xi_V|_U \cong U \times \xi_n$, wobei ξ_n das kanonische Linienbündel über $\mathbb{C}P^n$ ist (Beispiel: $\xi_1 = H$).

Sei also $p : V \rightarrow X$ ein Vektorraumbündel und $\pi : P(V) \rightarrow X$ die von p induzierte kanonische Projektion. Sei weiter L ein Linienbündel über X . (Hier ist die kanonische Projektion $P(L) \rightarrow X$ ein Homöomorphismus.) Durch Zurückziehen erhält man das Linienbündel π^*L über $P(V)$:

$$\begin{array}{ccc} \pi^*L & \xrightarrow{\bar{\pi}} & L \\ \downarrow & & \downarrow \\ P(V) & \xrightarrow{\pi} & X \end{array}$$

Wir bilden nun das ebenfalls eindimensionale Homomorphismenbündel über $P(V)$

$$E := \text{Hom}(\xi_V, \pi^*L) \cong \xi_V^* \otimes \pi^*L$$

(siehe Bezeichnung 2.1(ii)).

Es ist $P(V \oplus L) = \{[v, l] \mid v \in V, l \in L, (v, l) \neq (0, 0)\}$, und man kann $P(L)$ und $P(V)$ als Teilräume von $P(V \oplus L)$ auffassen.

Nun erhält man einen wohldefinierten Homöomorphismus

$$\begin{aligned} f : E = \text{Hom}(\xi_V, \pi^*L) &\xrightarrow{\cong} P(V \oplus L) \setminus P(L), \\ E_{[v]} \ni g &\longmapsto [v, g(v)], \end{aligned}$$

wobei wir $g : \xi_V \rightarrow \pi^*L$ und $\bar{\pi} \circ g : \xi_V \rightarrow L$ als Abbildungen nicht unterscheiden. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$[v, l] \longmapsto ((\xi_V)_{[v]} \ni v \mapsto l \in (\pi^*L)_{[v]}).$$

Verknüpft man f mit dem Homöomorphismus

$$\begin{aligned} h : D(E) \setminus S(E) &\xrightarrow{\cong} E, \\ x &\longmapsto \frac{x}{1-\|x\|}, \end{aligned}$$

(Umkehrabbildung $y \mapsto \frac{y}{1+\|y\|}$), so erhalten wir insgesamt einen Homöomorphismus

$$f \circ h : D(E) \setminus S(E) \xrightarrow{\cong} P(V \oplus L) \setminus P(L).$$

Diesen kann man eindeutig zu einem Homöomorphismus zwischen den Ein-Punkt-Kompaktifizierungen

$$F : D(E)/S(E) \xrightarrow{\cong} P(V \oplus L)/P(L)$$

fortsetzen. Mit den Ausschneidungsisomorphismen

$$\begin{aligned} \varphi_1 : K^*(D(E), S(E)) &\xrightarrow{\cong} \tilde{K}^*(D(E)/S(E)) \quad \text{und} \\ \varphi_2 : K^*(P(V \oplus L), P(L)) &\xrightarrow{\cong} \tilde{K}^*(P(V \oplus L)/P(L)) \end{aligned}$$

erhält man insgesamt einen Ringisomorphismus

$$\Phi_E := \varphi_2^{-1} \circ (F^{-1}) * \circ \varphi_1 : K^*(D(E), S(E)) \xrightarrow{\cong} K^*(P(V \oplus L), P(L)).$$

Wir setzen

$$U_E := \Phi_E(\lambda_E) \in K^0(P(V \oplus L), P(L))$$

und bezeichnen (wo kein Mißverständnis zu erwarten ist) auch U_E als Thom-Klasse von $E = \text{Hom}(\xi_V, \pi^*L) \cong \xi_V^* \otimes \pi^*L$.

Da $P(L) \approx X$ Retrakt von $P(V \oplus L)$ ist, zerfällt die lange exakte K -Gruppen-Sequenz zum Paar $(P(V \oplus L), P(L))$ in spaltende kurze exakte Sequenzen

$$0 \longrightarrow K^r(P(V \oplus L), P(L)) \xrightarrow{j^*} K^r(P(V \oplus L)) \longrightarrow K^r(P(L)) \longrightarrow 0.$$

Es sei $E_1 := \text{Hom}(\xi_{V \oplus L}, \pi_1^*L) \cong \xi_{V \oplus L}^* \otimes \pi_1^*L$ mit

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^*L & \xrightarrow{\bar{\pi}_1} & L \\ \downarrow & & \downarrow \\ P(V \oplus L) & \xrightarrow{\pi_1} & X. \end{array}$$

Betrachte nun die Inklusion $i : P(V) \hookrightarrow P(V \oplus L)$. Es ist $E = i^*E_1 = E_1|_{P(V)}$; man hat also eine Inklusion $\bar{i} : E \hookrightarrow E_1$:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\bar{i}} & E_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ P(V) & \xrightarrow{i} & P(V \oplus L) \end{array}$$

Diese induziert wiederum einen Homomorphismus

$$\bar{i}^* : K^*(D(E_1), S(E_1)) \longrightarrow K^*(D(E), S(E))$$

mit

$$\bar{i}^*(\lambda_{E_1}) = \lambda_E.$$

Betrachtet man nun die Abbildung von Paaren

$$\begin{array}{ccc} t : (P(V \oplus L), P(L)) & \longrightarrow & (P(V \oplus L \oplus L), P(L)), \\ [v, l] & \longmapsto & [v, 0, l], \end{array}$$

so stellt man fest, daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\bar{i}} & E_1 \\ \downarrow f \approx & & \downarrow f_1 \approx \\ P(V \oplus L) \setminus P(L) & \xrightarrow{t} & P(V \oplus L \oplus L) \setminus P(L) \end{array}$$

Sei $t' : P(V \oplus L) \rightarrow P(V \oplus L \oplus L)$ die von t induzierte Abbildung von Räumen. Entsprechend der Konstruktion des Isomorphismus Φ_E (und analog Φ_{E_1}) ergibt sich nun das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
K^*(P(V \oplus L)) & \xrightarrow{i^*} & K^*(P(V)) \\
\downarrow p_{D_1}^* & & \downarrow p_D^* \\
& & K^*(D(E_1)) \xrightarrow{\bar{i}^*} K^*(D(E)) \\
\downarrow T_{E_1} & & \downarrow T_E \\
& & K^*(D(E_1), S(E_1)) \xrightarrow{\bar{i}^*} K^*(D(E), S(E)) \\
\downarrow \cdot \lambda_{E_1} & & \downarrow \cdot \lambda_E \\
& & K^*(P(V \oplus L \oplus L), P(L)) \xrightarrow{t^*} K^*(P(V \oplus L), P(L)) \\
\downarrow \Phi_{E_1} \cong & & \downarrow \Phi_E \cong \\
& & K^*(P(V \oplus L \oplus L), P(L)) \xrightarrow{t^*} K^*(P(V \oplus L), P(L)) \\
\downarrow j_1^* & & \downarrow j^* \\
& & K^*(P(V \oplus L \oplus L)) \xrightarrow{t'^*} K^*(P(V \oplus L))
\end{array}$$

Die Abbildung $t' : P(V \oplus L) \rightarrow P(V \oplus L \oplus L)$, $[v, l] \mapsto [v, 0, l]$, ist homotop zu

$$\begin{aligned}
s' : P(V \oplus L) &\rightarrow P(V \oplus L \oplus L), \\
[v, l] &\longmapsto [v, l, 0].
\end{aligned}$$

Eine Homotopie ergibt sich vermöge

$$[v, l] \longmapsto [v, l \cdot \cos(\theta), l \cdot \sin(\theta)], \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Also ist $t'^* = s'^*$.

Wir machen nun zunächst folgende wichtige Bemerkung zur Beziehung zwischen Thom- und Eulerklasse:

Bemerkung 6.2.2. Sei $\sigma : P(V) \hookrightarrow D(E) \subset (D(E), S(E))$ der Nullschnitt und $s : P(V) \rightarrow (P(V \oplus L), P(L))$, $[v] \mapsto [v, 0]$. Man überlegt sich, daß folgen-

des Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 & & K^*(P(V)) \\
 & \nearrow \sigma^* & \uparrow s^* \\
 K^*(D(E), S(E)) & & \\
 & \searrow \Phi_E & \\
 & & K^*(P(V \oplus L), P(L))
 \end{array}$$

Daraus ergibt sich für die Euler-Klasse χ_E von E (vgl. Definition 6.1.4)

$$\chi_E = \sigma^*(\lambda_E) = s^*(\Phi_E(\lambda_E)) = s^*(U_E).$$

Sei nun $x \in K^*(P(V \oplus L))$ und $x' := i^*(x)$ die Restriktion von x auf $K^*(P(V))$ (mit $i : P(V) \hookrightarrow P(V \oplus L)$, $[v] \mapsto [v, 0]$). Es ist $s = j_1 \circ s'$, also ergibt sich alles in allem (unter Verwendung des vorletzten Diagramms)

$$\begin{aligned}
 j^*(\Phi_E(T_E(x'))) &= t'^*(j_1^*(\Phi_{E_1}(T_{E_1}(x)))) \\
 &= s'^*(j_1^*(\Phi_{E_1}(T_{E_1}(x)))) \\
 &= s^*(\Phi_{E_1}(T_{E_1}(x))) \\
 &= \sigma^*(p_{D_1}^*(x) \cdot \lambda_{E_1}) \\
 &= (p_{D_1} \circ \sigma)^*(x) \cdot \sigma^*(\lambda_{E_1}) \\
 &= x \cdot \chi_{E_1}.
 \end{aligned}$$

Wir fassen unsere Ergebnisse im folgenden Satz zusammen:

Satz 6.2.3. *Man hat spaltende kurze exakte Sequenzen*

$$0 \longrightarrow K^r(P(V \oplus L), P(L)) \xrightarrow{j^*} K^r(P(V \oplus L)) \longrightarrow K^r(P(L)) \longrightarrow 0.$$

Ist $U_E \in K^0(P(V \oplus L), P(L)) \cong K^0(D(E), S(E))$ die Thom-Klasse des Vektorraumbündels $E = \text{Hom}(\xi_V, \pi^*L) \cong \xi_V^* \otimes \pi^*L$ über $P(V)$, so ist $j_0^*(U_E) = \chi_{E_1}$ die Euler-Klasse des Vektorraumbündels $E_1 = \text{Hom}(\xi_{V \oplus L}, \pi_1^*L)$ über $P(V \oplus L)$ mit der Projektion $\pi_1 : P(V \oplus L) \rightarrow X$.

Zudem gilt: Ist $x \in K^r(P(V \oplus L))$ und $x' := i^*(x)$ die Restriktion von x auf $K^r(P(V))$ (mit $i : P(V) \hookrightarrow P(V \oplus L)$, $[v] \mapsto [v, 0]$), so gilt die Formel

$$j^*(\Phi_E(T_E(x'))) = j^*(\Phi_E(p_D^*(x') \cdot \lambda_E)) = x \cdot j^*(U_E) = x \cdot \chi_{E_1}. \quad \square$$

Satz 6.2.4. *Sei X ein kompakter Hausdorffraum und $\pi_n : X \times \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{C}P^n$ die kanonische Projektion. Sei ξ_n das kanonische Linienbündel über $\mathbb{C}P^n$ und $t_n := \chi_{\pi_n^* \xi_n} = 1 - \pi_n^* \xi_n \in K^0(X \times \mathbb{C}P^n)$ die Eulerklasse des Bündels $\pi_n^* \xi_n$.*

Dann gilt: $K^(X \times \mathbb{C}P^n)$ ist ein freier $K^*(X)$ -Modul mit Basis $\{1, t_n, t_n^2, \dots, t_n^n\}$. Zudem ist $t_n^{n+1} = 0$, woraus folgt*

$$\begin{array}{ccc} K^*(X \times \mathbb{C}P^n) & \xrightarrow{\cong} & K^*(X)[t]/(t^{n+1}), \\ t_n & \longmapsto & t, \end{array}$$

als $K^*(X)$ -Moduln (und graduierte Ringe). (t^{n+1}) bezeichnet das von t^{n+1} erzeugte Hauptideal in $K^*(X)[t]$.

BEWEIS:

Um die erste Aussage zu beweisen, machen wir Induktion nach n , beginnend mit dem trivialen Fall $n = 0$. Nun betrachten wir die spaltende kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow K^*(X \times \mathbb{C}P^{n+1}, X) \xrightarrow{j^*} K^*(X \times \mathbb{C}P^{n+1}) \longrightarrow K^*(X) \longrightarrow 0.$$

Nach den vorangegangenen Überlegungen haben wir einen Isomorphismus

$$\Phi_n : K^*(X \times \mathbb{C}P^n) \xrightarrow[\cong]{T_{\pi_n^* \xi_n}} K^*(D(\pi_n^* \xi_n), S(\pi_n^* \xi_n)) \xrightarrow[\cong]{\Phi_{\pi_n^* \xi_n}} K^*(X \times \mathbb{C}P^{n+1}, X).$$

Somit ist $j^* \circ \Phi_n : K^*(X \times \mathbb{C}P^n) \hookrightarrow K^*(X \times \mathbb{C}P^{n+1})$ eine Inklusion des (nach Induktionsvoraussetzung) freien $K^*(X)$ -Moduls $K^*(X \times \mathbb{C}P^n)$ mit Basis $\{1, t_n, \dots, t_n^n\}$. Man überlegt sich leicht, daß

$$t_{n+1}|_{X \times \mathbb{C}P^n} = t_n$$

gilt. Aus der in Satz 6.2.3 angegebenen Formel ergibt sich daher für $k \geq 0$

$$j^*(\Phi_n(t_n^k)) = t_{n+1}^{k+1} \in K^*(X \times \mathbb{C}P^{n+1}).$$

Also ist $\text{Bild}(j^* \circ \Phi_n)$ der freie $K^*(X)$ -Untermodule von $K^*(X \times \mathbb{C}P^{n+1})$ mit Basis $\{t_{n+1}, t_{n+1}^2, \dots, t_{n+1}^{n+1}\}$. Da der Quotientenmodul $K^*(X \times \mathbb{C}P^{n+1}) / \text{Bild}(j^* \circ \Phi_n)$ isomorph zu $K^*(X)$ ist, folgt, daß $\{1, t_{n+1}, t_{n+1}^2, \dots, t_{n+1}^{n+1}\}$ eine Basis von $K^*(X \times \mathbb{C}P^{n+1})$ über $K^*(X)$ ist.

Der zweite Teil der Aussage folgt per Induktion ab $n = 1$:

$$\begin{aligned} t_1 &= 1 - \pi_1^* \xi_1 = \pi_1^*(1 - H^*), \text{ also} \\ t_1^2 &= \pi_1^*((1 - H^*)^2) \stackrel{5.2.4}{=} 0. \end{aligned}$$

Per Induktion ist $t_{n+1}^{n+2} = j^*(\Phi_n(t_n^{n+1})) = 0$. □

Korollar 6.2.5 (*K*-Theorie von $\mathbb{C}P^n$).

Es ist $K^0(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{Z}[t]/(t^{n+1})$, wobei $t = 1 - \xi_n^$ die Euler-Klasse von ξ_n^* ist, und $K^1(\mathbb{C}P^n) = 0$. \square*

Aufgabe 6.2.6. Wenn man $K^*(\mathbb{C}P^n)$ nur als \mathbb{Z} -Modul betrachtet (also die Ringstruktur „vergißt“), ist die Berechnung viel leichter. Verwende die kanonische Zellzerlegung von $\mathbb{C}P^n$.

Kapitel 7

H -Raum-Strukturen auf Sphären und Hopf-Invariante

7.1 Abbildungsgrad und Bigrad

Definition 7.1.1 (Abbildungsgrad, Bigrad).

- (i) Sei σ_k ein Erzeuger von $\tilde{K}^k(S^k) \cong \mathbb{Z}$. Der *Abbildungsgrad* $\text{Grad}(f)$ einer stetigen Abbildung $f : S^k \rightarrow S^k$ ist definiert als die ganze Zahl mit

$$f^* : \tilde{K}^k(S^k) \longrightarrow \tilde{K}^k(S^k), \quad \sigma_k \longmapsto \text{Grad}(f) \cdot \sigma_k.$$

Diese Definition ist offenbar unabhängig von der Wahl von σ_k . Homotope Abbildungen haben denselben Grad. Für $f, g : S^k \rightarrow S^k$ gilt $\text{Grad}(f \circ g) = \text{Grad}(f) \cdot \text{Grad}(g)$. $\text{Grad}(\text{Id}_{S^k}) = 1$. Konstante und damit nullhomotope Abbildungen haben Grad 0. (Diese Definition des Abbildungsgrades entspricht vom Ergebnis her der Definition über gewöhnliche (Ko-)Homologie.)

- (ii) Man sagt, eine Abbildung $m : S^k \times S^k \rightarrow S^k$ ist vom *Bigrad* (p, q) , wenn $\text{Grad}(x \mapsto m(x, x_2)) = p$ und $\text{Grad}(y \mapsto m(x_1, y)) = q$. Da der Abbildungsgrad homotopieinvariant ist, spielt die Wahl von x_1 und x_2 für den Bigrad keine Rolle.

Der Begriff des H -Raumes verallgemeinert den der topologischen Gruppe.

Definition 7.1.2 (H -Raum).

Ein H -Raum ist ein punktierter Raum (X, e) mit Basispunkt e zusammen mit einer Abbildung

$$m : X \times X \longrightarrow X$$

mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $m(e, e) = e$;
- (ii) $[x \mapsto m(x, e)] \simeq \text{Id}_X \text{ (rel}\{e\}\text{)}$;
- (iii) $[y \mapsto m(e, y)] \simeq \text{Id}_X \text{ (rel}\{e\}\text{)}$.

Bemerkung 7.1.3. Ein H -Raum hat stets eine abelsche Fundamentalgruppe. (Siehe [Br, Chap. VII, Theorem 4.1].)

In diesem Kapitel interessiert uns die Frage, für welche k man die Sphäre S^k mit einer H -Raum-Struktur versehen kann.

Beispiel 7.1.4.

(i) Topologische Gruppen sind insbesondere H -Räume.

- Multiplikation auf \mathbb{R} macht $S^0 = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| = 1\}$ zur topologischen Gruppe.
- Multiplikation auf \mathbb{C} macht $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ zur topologischen Gruppe.
- Sei $\mathbb{H} := \left\{ q \mid q = \begin{pmatrix} a & -b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in (\mathbb{C})_2 \right\}$ der Quaternionen-Schiefkörper (Multiplikation durch Matrix-Multiplikation induziert).

Definiere $\bar{q} := \begin{pmatrix} \bar{a} & -\bar{b} \\ b & a \end{pmatrix}$, $|q|^2 := \det(q) = |a|^2 + |b|^2$. Multiplikation auf \mathbb{H} macht $S^3 \approx \{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\}$ zur topologischen Gruppe.

(ii) Sei $\mathbb{O} := \{c = (q_1, q_2) \mid q_i \in \mathbb{H}\}$ die Menge der sogenannten *Cayley-Zahlen*. Auf \mathbb{O} kann man ein distributives, aber nicht assoziatives Produkt wie folgt definieren:

$$(q_1, q_2) \cdot (r_1, r_2) := (q_1 r_1 - \bar{r}_2 q_2, r_2 q_1 + q_2 \bar{r}_1).$$

\mathbb{O} ist nullteilerfrei. Definiere $|c|^2 := |q_1|^2 + |q_2|^2$.

Multiplikation auf \mathbb{O} macht $S^7 \approx \{c \in \mathbb{O} \mid |c| = 1\}$ zu einem H -Raum.

(iii) Besitzt S^k eine H -Raum-Struktur, so muß es eine Abbildung $m : S^k \times S^k \longrightarrow S^k$ vom Bigrad $(1, 1)$ geben.

Ziel dieses Kapitels ist es im wesentlichen, folgende Tatsachen zu beweisen:

- Genau dann besitzt S^k eine H -Raum-Struktur, wenn es eine Abbildung $m : S^k \times S^k \longrightarrow S^k$ vom Bigrad $(1, 1)$ gibt.
- Genau dann besitzt S^k eine H -Raum-Struktur, wenn $k \in \{0, 1, 3, 7\}$ ist.

Um diese Aussagen beweisen zu können, müssen wir zunächst einige Hilfsmittel entwickeln.

7.2 Hopf-Invariante

Sei $n \geq 2$ eine gerade Zahl und $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$ eine Abbildung. Wir konstruieren den kompakten Raum $C_f = D^{2n} \cup_f S^n$ durch folgendes Push-Out:

$$\begin{array}{ccc} S^{2n-1} & \hookrightarrow & D^{2n} \\ \downarrow f & & \downarrow \\ S^n & \xrightarrow{i} & C_f \end{array}$$

Bis auf Homöomorphie ist C_f der Abbildungskegel von f , d.h.

$$C_f \approx (S^{2n-1} \times I) \amalg S^n / \sim$$

mit $(x, 0) \sim (x', 0)$, $(x, 1) \sim f(x)$. Da die Inklusion $S^{2n-1} \hookrightarrow D^{2n}$ eine Kofaserung ist, ist nach Satz 3.13 (C_f, S^n) ein Ko-Raumpaar im Sinne von Definition 1.4. Nun betrachten wir die lange exakte K -Gruppen-Sequenz des Tripels $\{pt\} \xrightarrow{j} S^n \xrightarrow{i} C_f$:

$$\longrightarrow \tilde{K}^{-1}(S^n) \xrightarrow{\delta^{-1}} K^0(C_f, S^n) \xrightarrow{j^*} \tilde{K}^0(C_f) \xrightarrow{i^*} \tilde{K}^0(S^n) \xrightarrow{\delta^0} K^1(C_f, S^n) \longrightarrow$$

Nach Korollar 5.1.6 gilt

$$\begin{aligned} \tilde{K}^{-1}(S^n) &= 0; \\ K^1(C_f, S^n) &\stackrel{\text{Ausschn.}}{\cong} K^1(D^{2n}, S^{2n-1}) = 0. \end{aligned}$$

Also bleibt folgende kurze exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow K^0(C_f, S^n) \xrightarrow{j^*} \tilde{K}^0(C_f) \xrightarrow{i^*} \tilde{K}^0(S^n) \longrightarrow 0.$$

Wir verknüpfen j^* mit dem Ausschneidungsisomorphismus

$$\alpha : \tilde{K}^0(S^{2n}) \xrightarrow{\cong} K^0(D^{2n}, S^{2n-1}) \xrightarrow{\cong} K^0(C_f, S^n) \quad (7.1)$$

und erhalten die kurze exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \tilde{K}^0(S^{2n}) & \xrightarrow{j^* \circ \alpha} & \tilde{K}^0(C_f) & \xrightarrow{i^*} & \tilde{K}^0(S^n) \longrightarrow 0. \\ & & \parallel & & & & \parallel \\ & & \langle \beta_{2n} \rangle & & & & \langle \beta_n \rangle \end{array} \quad (7.2)$$

Wir definieren

$$v := (j^* \circ \alpha)(\beta_{2n}) \in \tilde{K}^0(C_f).$$

Es ist $v^2 = ((j^* \circ \alpha)(\beta_{2n}))^2 = (j^* \circ \alpha)(\beta_{2n}^2) = 0$ wegen $\beta_{2n}^2 = 0$. Wir wählen $u \in \tilde{K}^0(C_f)$ mit

$$i^*(u) = \beta_n.$$

Aus $\beta_n^2 = 0$ folgt $u^2 \in \text{Kern}(i^*) = \text{Bild}(j^* \circ \alpha) = \langle v \rangle$. Also gibt es $\lambda_f \in \mathbb{Z}$ mit

$$u^2 = \lambda_f \cdot v.$$

Wir zeigen noch, daß λ_f wirklich nur von f abhängt, also nicht von der Wahl von u . Dazu zeigen wir zunächst $u \cdot v = 0 \in \tilde{K}^0(C_f)$:

$$i^*(v \cdot u) = \underbrace{i^*(v)}_{=0} \cdot i^*(u) = 0 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{Z} \text{ mit } u \cdot v = m \cdot v.$$

Daraus folgt wegen $u^2 = \lambda_f \cdot v$ und $v^2 = 0$ wiederum

$$m \cdot u \cdot v = u^2 \cdot v = \lambda_f \cdot v^2 = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ oder } u \cdot v = 0 \stackrel{u \cdot v = m \cdot v}{\Rightarrow} u \cdot v = 0.$$

Nun zur Wohldefiniertheit von λ_f : Sei $u' \in \tilde{K}^0(C_f)$ mit $i^*(u') = i^*(u) = \beta_n$. Dann ist $u' = u + k \cdot v$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und

$$u'^2 = (u + k \cdot v)^2 = u^2 + 2k \cdot \underbrace{(u \cdot v)}_{=0} + \underbrace{k^2 \cdot v^2}_{=0} = u^2.$$

Also gilt $u'^2 = u^2 = \lambda_f \cdot v$.

Definition 7.2.1 (Hopf-Invariante).

Sei $n \geq 2$ gerade und $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$ stetig. Die ganze Zahl $\lambda_f =: h(f)$ heißt *Hopf-Invariante von f* .

In der Literatur findet man auch andere Definitionen der Hopf-Invariante. Man kann jedoch zeigen, daß diese alle äquivalent sind.

Folgendes Lemma ist für uns zwar nicht von Belang, soll aber aus Gründen der Vollständigkeit zumindest ohne Beweis angegeben werden:

Lemma 7.2.2. *Sei wieder $n \geq 2$ gerade.*

(i) *Die Hopf-Invariante liefert einen Homomorphismus*

$$\begin{aligned} H : \pi_{2n-1}(S^n) &\longrightarrow \mathbb{Z}, \\ [f] &\longmapsto h(f), \end{aligned}$$

wobei $\pi_{2n-1}(S^n) = [S^{2n-1}, S^n]$ die Gruppe der Homotopieklassen von Abbildungen $S^{2n-1} \rightarrow S^n$ ist.

(ii) Seien $r : S^n \rightarrow S^n$ und $s : S^{2n-1} \rightarrow S^{2n-1}$ stetige Abbildungen. Dann gilt

$$h(r \circ f \circ s) = \text{Grad}(s) \cdot \text{Grad}(r)^2 \cdot h(f).$$

BEWEIS:

[Hu, Chap. 15, 2.1 und 2.2]. □

Satz 7.2.3. Sei $n \geq 2$ gerade und $m : S^{n-1} \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ eine Abbildung vom Bigrad (p, q) . Dann existiert eine Abbildung $f_m : S^{2n-1} \rightarrow S^n$ mit

$$h(f_m) = p \cdot q.$$

BEWEIS:

1. Schritt: Konstruktion einer Abbildung f_m .

Wir numerieren die beiden Faktoren von $S^{n-1} \times S^{n-1}$ mit S_1^{n-1} bzw. S_2^{n-1} . Es sei $S_i^{n-1} = \partial D_i^n$ ($i = 1, 2$). Wir nehmen folgende Identifikationen vor:

$$\begin{array}{ccc} D_i^n & = & S_i^{n-1} \times [0, 1] / S_i^{n-1} \times \{1\} \\ \uparrow & & \uparrow \\ S_i^{n-1} & = & S_i^{n-1} \times \{0\} \end{array}$$

Außerdem zerlegen wir $S^n = S_+^n \cup S_-^n$ mit $S_+^n \cap S_-^n = S^{n-1}$ (vgl. Vorbemerkung zu Lemma 5.2.1) und setzen

$$\begin{array}{ccc} S_{\pm}^n & = & S^{n-1} \times [0, 1] / S^{n-1} \times \{1\} \\ \uparrow & & \uparrow \\ S^{n-1} & = & S^{n-1} \times \{0\} \end{array}$$

Schließlich sei $S^{2n-1} = \partial D^{2n}$ mit $D^{2n} = D_1^n \times D_2^n$. Nun können wir $f_m : S^{2n-1} \rightarrow S^n$ wie folgt konstruieren:

$$\begin{aligned} f_m^1 : S_1^{n-1} \times D_2^n &\longrightarrow S_+^n, \\ (x, (y, t)) &\longmapsto (m(x, y), t); \\ f_m^2 : D_1^n \times S_2^{n-1} &\longrightarrow S_-^n, \\ ((x, t), y) &\longmapsto (m(x, y), t). \end{aligned}$$

Da $f_m^1|_{S_1^{n-1} \times S_2^{n-1}} = f_m^2|_{S_1^{n-1} \times S_2^{n-1}}$, ist folgende Abbildung f_m wohldefiniert:

$$\begin{array}{ccc} S^{2n-1} = \partial(D_1^n \times D_2^n) = S_1^{n-1} \times D_2^n \cup D_1^n \times S_2^{n-1} & & \\ \downarrow f_m & & \downarrow f_m^1 \quad \cup \quad \downarrow f_m^2 \\ S^n & \xlongequal{\quad\quad\quad} & S_+^n \quad \cup \quad S_-^n \end{array}$$

2. Schritt: $h(f_m) = p \cdot q$.

Es ist $C_{f_m} = (D_1^n \times D_2^n) \amalg S^n / \sim$ mit $x \sim f_m(x)$ für $x \in S^{2n-1} = D_1^n \times S_2^{n-1} \cup S_1^{n-1} \times D_2^n$. Sei

$$\Theta : (D_1^n \times D_2^n) \amalg S^n \longrightarrow C_{f_m}$$

die Quotientenabbildung und f_0 ihre Restriktion auf $D_1^n \times D_2^n$. Wir betrachten die Abbildung von Tripeln

$$g := (f_0, f_m^1, f_m^2) : (D_1^n \times D_2^n, S_1^{n-1} \times D_2^n, D_1^n \times S_2^{n-1}) \longrightarrow (C_{f_m}, S_+^n, S_-^n).$$

Wir wollen g weiter untersuchen:

Sei $k : (D^n, S^{n-1}) \longrightarrow (S^n, pt)$ stets die kanonische Abbildung von Paaren, $l : S^n \longrightarrow S^n/S_+^n \approx S^n$ die Projektion und $l' : (C_{f_m}, S_+^n) \longrightarrow (C_{f_m}, pt)$ dadurch induziert. Folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & (S_1^n, pt) \\
 & & & & \uparrow k \\
 & & & & \downarrow g_1 \\
 (S_1^{n-1}, pt) & \hookrightarrow & (D_1^n \times \{x_2\}, S_1^{n-1} \times \{x_2\}) & \xrightarrow{i'} & ((D_1^n, S_1^{n-1}) \times D_2^n) \\
 \downarrow x \mapsto m(x, x_2) & & \searrow g_1 & & \downarrow g \\
 (S_1^{n-1}, pt) & \hookrightarrow & (S_-^n, S^{n-1}) & \hookrightarrow & (S^n, S_+^n) & \hookrightarrow & (C_{f_m}, S_+^n) \\
 & & \parallel & & \downarrow l & & \downarrow l' \\
 & & (D^n, S^{n-1}) & \xrightarrow{k} & (S^n, pt) & \hookrightarrow & (C_{f_m}, pt) \\
 & & & & \downarrow l & & \downarrow l' \\
 & & & & (S^n, S_+^n) & \hookrightarrow & (C_{f_m}, S_+^n) \\
 & & & & \downarrow l & & \downarrow l' \\
 & & & & (S^n, pt) & \hookrightarrow & (C_{f_m}, pt) \\
 & & & & \downarrow l & & \downarrow l' \\
 & & & & (S^n, S_+^n) & \hookrightarrow & (C_{f_m}, S_+^n) \\
 & & & & \downarrow l & & \downarrow l' \\
 & & & & (S^n, pt) & \hookrightarrow & (C_{f_m}, pt)
 \end{array}$$

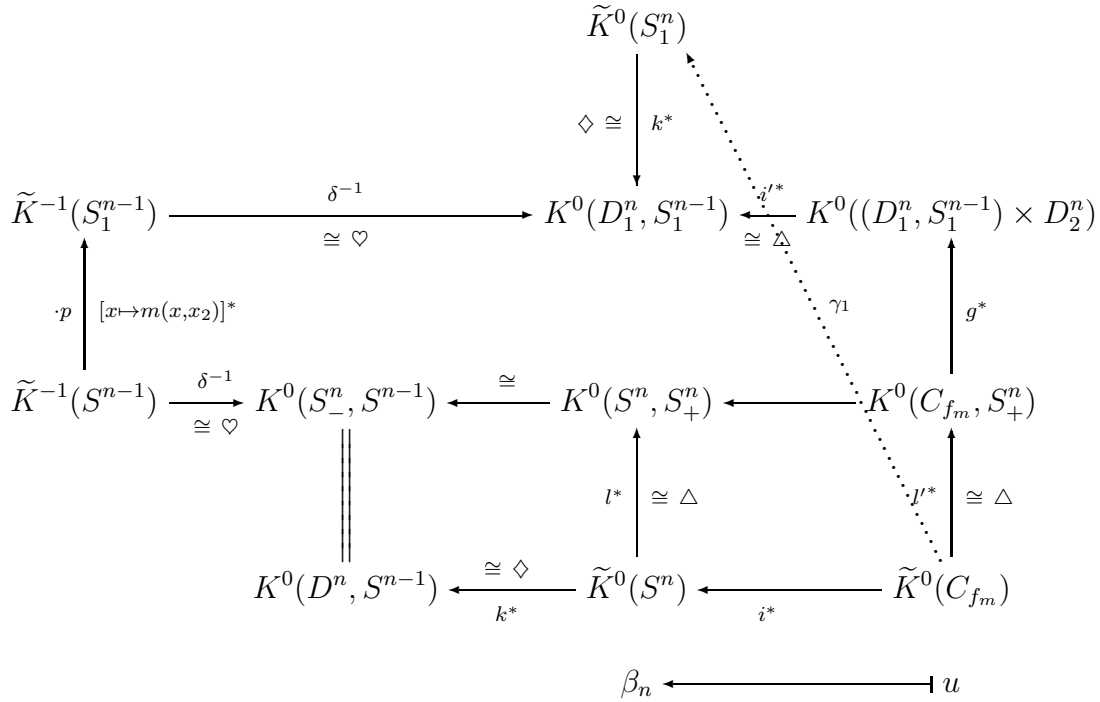
Auf K -Gruppen-Niveau führt dies zum folgenden kommutativen Diagramm:

(Begründung der Isomorphismen:

♡: Randoperator der exakten Tripelsequenz zu (D^n, S^{n-1}, pt) ;

◇: Ausschneidung;

△: Homotopieinvarianz.)



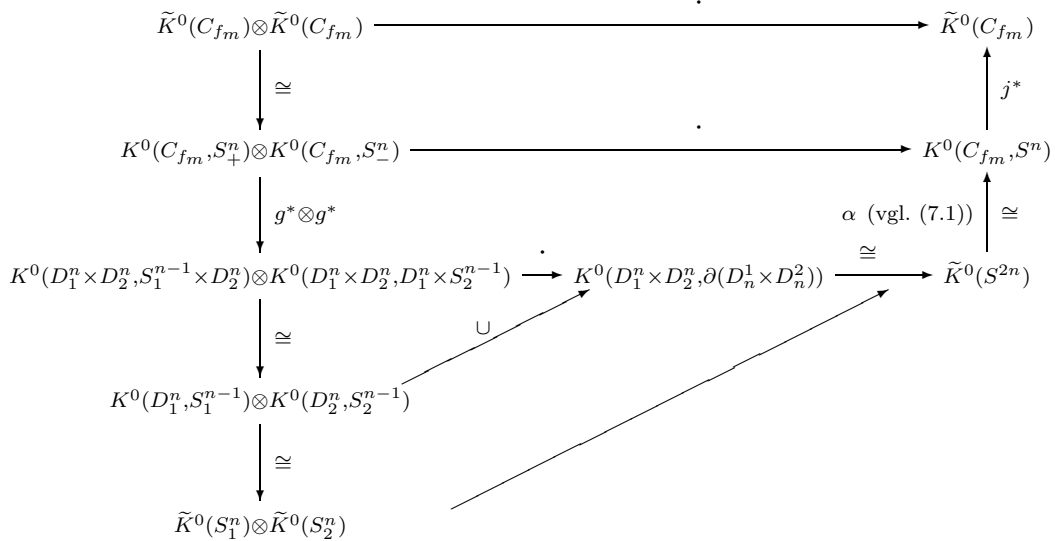
Also gilt für $u \in \tilde{K}^0(C_{f_m})$, $i^*(u) = \beta_n$ und die oben definierte Abbildung γ_1

$$\gamma_1(u) = p \cdot \beta_n^{(1)}.$$

Ganz genauso konstruiert man $\gamma_2 : \tilde{K}^0(C_{f_m}) \rightarrow \tilde{K}^0(S_2^n)$ mit

$$\gamma_2(u) = q \cdot \beta_n^{(2)}.$$

Jetzt betrachten wir folgendes kommutatives Diagramm:



Die linke Vertikale des Diagramms ist die Abbildung $\gamma_1 \otimes \gamma_2$. Wir betrachten nun, wie $u \otimes u$ abgebildet wird: In der oberen Zeile steht dann $u \otimes u \mapsto u^2$. Geht man dagegen „ganz unten herum“, so ergibt sich

$$u \otimes u \xrightarrow{\gamma_1 \otimes \gamma_2} (p \cdot q) \cdot \beta_n^{(1)} \otimes \beta_n^{(2)} \longmapsto (p \cdot q) \cdot \beta_{2n} \longmapsto (p \cdot q) \cdot (j^* \circ \alpha)(\beta_{2n}) = (p \cdot q) \cdot v.$$

(Daß $\beta_n^{(1)} \otimes \beta_n^{(2)}$ unter dem Produkt auf β_{2n} abgebildet wird, kann man sofort beim Beweis von Korollar 5.1.8 ablesen.)

Da das Diagramm kommutiert, folgt

$$u^2 = (p \cdot q) \cdot v,$$

also

$$h(f_m) = p \cdot q. \quad \square$$

Bemerkung 7.2.4. Man kann beweisen, daß für alle geraden Zahlen n und λ eine stetige Abbildung $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$ mit $h(f) = \lambda$ existiert. (Wegen Lemma 7.2.2(ii) reicht es, eine Abbildung $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$ mit Hopf-Invariante ± 2 zu konstruieren. Näheres bei [Hu, Chap. 15, 3.6].)

Wir wollen als nächstes zeigen, daß S^k für gerades $k \geq 2$ kein H -Raum sein kann. Dazu benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 7.2.5. *Sei $k \in \mathbb{N}$ gerade und $\beta_k \in \tilde{K}^0(S^k)$ der Erzeuger aus Korollar 5.1.8. Dann wird $\tilde{K}^0(S^k \times S^k)$ über \mathbb{Z} frei erzeugt von den Elementen $\beta_k \hat{\otimes} 1$, $\beta_k \hat{\otimes} \beta_k$ und $1 \hat{\otimes} \beta_k$, d.h.*

$$\tilde{K}^0(S_1^k \times S_2^k) \cong \tilde{K}^0(S_1^k) \oplus \left(\tilde{K}^0(S_1^k) \otimes \tilde{K}^0(S_2^k) \right) \oplus \tilde{K}^0(S_2^k).$$

BEWEIS:

Betrachte das Tripel $(S_1^k \times S_2^k, S_1^k \vee S_2^k, (x_1, x_2))$, $S_1^k \vee S_2^k := S_1^k \times \{x_2\} \cup \{x_1\} \times S_2^k$.

- Aus der reduzierten Version der Mayer-Vietoris-Sequenz folgt, daß die kanonischen Inklusionen $S_1^k, S_2^k \hookrightarrow S_1^k \vee S_2^k$ Isomorphismen

$$\tilde{K}^n(S_1^k \vee S_2^k) \xrightarrow{\cong} \tilde{K}^n(S_1^k) \oplus \tilde{K}^n(S_2^k)$$

induzieren. (Insbesondere ist $\tilde{K}^n(S_1^k \vee S_2^k) = 0$ für ungerades n .)

- Seien $i_1 : S_1^k \hookrightarrow S_1^k \times S_2^k$, $i_2 : S_2^k \hookrightarrow S_1^k \times S_2^k$ die kanonischen Inklusionen. Es gibt Retraktionen $r_{1,2} : S_1^k \times S_2^k \rightarrow S_{1,2}^k$, so daß die lange exakte K -Gruppen-Sequenz zum Tripel $(x_1, x_2) \hookrightarrow S_1^k \vee S_2^k \xrightarrow{j} S_1^k \times S_2^k$ in kurze exakte und spaltende Teilstücke zerfällt. Insbesondere ist dann

$$0 \longrightarrow K^0(S_1^k \times S_2^k, S_1^k \vee S_2^k) \xrightarrow{j^*} \tilde{K}^0(S_1^k \times S_2^k) \xrightarrow{i_1^* \oplus i_2^*} \tilde{K}^0(S_1^k) \oplus \tilde{K}^0(S_2^k) \longrightarrow 0$$

exakt und spaltend. Es ist $r_1^*(\beta_k) = \beta_k \hat{\otimes} 1$, $r_2^*(\beta_k) = 1 \hat{\otimes} \beta_k$.

- Äußere Multiplikation liefert noch einen Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}^0(S_1^k) \otimes \tilde{K}^0(S_2^k) & \xrightarrow{\cong} & K^0(S_1^k \times S_2^k, S_1^k \vee S_2^k), \\ \beta_k^1 \otimes \beta_k^2 & \longmapsto & \beta_k^1 \hat{\otimes} \beta_k^2. \end{array}$$

(Dies folgt wie im Beweis von Korollar 5.1.8.)

Insgesamt folgt die Behauptung. \square

Satz 7.2.6. *Sei $n \geq 0$ ungerade und $m : S^{n-1} \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ vom Bigrad (p, q) . Dann ist*

$$p \cdot q = 0.$$

BEWEIS:

Wir übernehmen die Bezeichnungen aus dem vorigen Lemma ($k = n - 1$). m induziert eine Abbildung

$$m^* : \tilde{K}^0(S^{n-1}) \longrightarrow \tilde{K}^0(S^{n-1} \times S^{n-1})$$

mit

$$m^*(\beta_{n-1}) = a \cdot (\beta_{n-1} \hat{\otimes} 1) + b \cdot (\beta_{n-1} \hat{\otimes} \beta_{n-1}) + c \cdot (1 \hat{\otimes} \beta_{n-1}) \quad (a, b, c \in \mathbb{Z}).$$

Nach Definition des Bigrades gilt

$$\begin{array}{l} i_1^* \circ m^* : \tilde{K}^0(S^{n-1}) \rightarrow \tilde{K}^0(S^{n-1}), \quad \beta_{n-1} \mapsto p \cdot \beta_{n-1}; \\ i_2^* \circ m^* : \tilde{K}^0(S^{n-1}) \rightarrow \tilde{K}^0(S^{n-1}), \quad \beta_{n-1} \mapsto q \cdot \beta_{n-1}. \end{array}$$

Damit folgt $a = p$ und $c = q$. Da m^* ein Ringhomomorphismus ist, ergibt sich aus $\beta_{n-1}^2 = 0$

$$0 = m^*(\beta_{n-1})^2 = 2 \cdot p \cdot q \cdot (\beta_{n-1} \hat{\otimes} \beta_{n-1}) \Rightarrow p \cdot q = 0. \quad \square$$

Korollar 7.2.7. *Für gerades $k \geq 2$ ist S^k kein H -Raum.* \square

7.3 Adams-Operationen

Definition 7.3.1 (Operationen in K -Theorie).

Eine *Operation in K -Theorie* ist eine natürliche Abbildung $T : K(X) \rightarrow K(X)$ (nicht notwendig ein Homomorphismus), die für jeden kompakten Hausdorffraum X definiert ist.

Satz 7.3.2 (Spaltungsprinzip).

Sei E ein Vektorraumbündel über dem kompakten Hausdorffraum X . Dann gibt es einen Hausdorffraum Y und eine Abbildung $\pi : Y \rightarrow X$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $\pi^* : K^*(X) \rightarrow K^*(Y)$ ist injektiv.
- (ii) π^*E zerfällt über Y in eine direkte Summe von Linienbündeln.

BEWEIS:

Die Konstruktion von Y erfolgt induktiv. Man setzt zunächst $Y := P(E)$ (projektives Bündel zu E) und $\pi : Y = P(E) \rightarrow X$, $[v] \mapsto p(v)$, wobei $p : E \rightarrow X$ die Bündelprojektion ist. Dann hat man das Pull-Back

$$\begin{array}{ccc} \pi^*E & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow p \\ P(E) & \xrightarrow{\pi} & X \end{array}$$

Das kanonische Linienbündel $\xi_E := \{(x, [v], \lambda v) \mid x \in X, 0 \neq v \in E_x, \lambda \in \mathbb{C}\}$ ist ein Unterbündel von π^*E (warum?). Nach Wahl einer Riemannschen Metrik auf π^*E hat man eine Zerlegung

$$\pi^*E \cong \xi_E \oplus \xi_E^\perp$$

mit $\dim(\xi_E^\perp) = \dim(E) - 1$. Nun machen wir Induktion über $\dim(E)$ und haben damit (ii) gezeigt.

Um die Injektivität von π^* zu beweisen, greift man auf das Ergebnis von Satz 6.2.4 zurück. Wir argumentieren ähnlich wie im Beweis des Thom-Isomorphismus' (Satz 6.1.5). Sei o.B.d.A. X zusammenhängend, $\dim(E) = n + 1$ und $\{U_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ eine offene Überdeckung von X mit $E|_{U_i} \cong U_i \times \mathbb{C}^{n+1}$. Setze $B_m := X$. Nach Lemma 6.1.8 gibt es für $i = m, m-1, \dots, 1$ in X abgeschlossene Teilmengen A_i, B_{i-1} mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $A_i \subset U_i, A_i \subset B_i, m \geq i \geq 1$;
- (ii) $B_{i-1} \subset U_1 \cup \dots \cup U_{i-1}, B_{i-1} \subset B_i, m \geq i \geq 1$;
- (iii) $\text{Int}_{B_i}(A_i) \cup \text{Int}_{B_i}(B_{i-1}) = B_i$.

(Beachte noch, daß $B_0 = \emptyset$ ist.) Sei $t := \chi_{\pi^*\xi_E^*} = 1 - \pi^*\xi_E^* \in K(P(E))$. Sei $M := \mathbb{Z}[t]/(t^{n+1})$, d.h. M ist als Modul frei über \mathbb{Z} mit der Basis $\{1, t, \dots, t^n\}$. Wir zeigen per Induktion nach i : Für jeden abgeschlossenen Teilraum $Z \subset B_i$ ist

$$\begin{aligned} \varphi_Z : K^*(Z) \otimes_{\mathbb{Z}} M &\longrightarrow K^*(\pi^{-1}(Z)) \\ x \otimes t &\longmapsto (\pi|_Z)^*(x) \cdot t|_{\pi^{-1}(Z)} \end{aligned}$$

ein Isomorphismus (von graduierten Ringen), insbesondere ist also $(\pi|_Z)^* : K^*(Z) \longrightarrow K^*(\pi^{-1}(Z))$ injektiv.

Trivialerweise gilt das für $B_0 = \emptyset$. Sei dies nun auch für B_{i-1} richtig ($1 \leq i \leq m$). Für $Z \subset B_i$ gilt (vgl. Beweis von Satz 6.1.5)

$$Z = \text{Int}_Z(Z \cap A_i) \cup \text{Int}_Z(Z \cap B_{i-1}).$$

Man überlegt sich, daß dann auch

$$\pi^{-1}(Z) = \text{Int}_{\pi^{-1}(Z)}(\pi^{-1}(Z \cap A_i)) \cup \text{Int}_{\pi^{-1}(Z)}(\pi^{-1}(Z \cap B_{i-1}))$$

gilt. Nach Satz 6.2.4 ist $\varphi_{Z \cap A_i}$ ein Isomorphismus (denn $E|_{Z \cap A_i} \cong (Z \cap A_i) \times \mathbb{C}^{n+1}$); nach Induktionsvoraussetzung sind $\varphi_{Z \cap B_{i-1}}$ und $\varphi_{Z \cap B_{i-1} \cap A_i}$ Isomorphismen. Die exakte Mayer-Vietoris-Sequenz

$$\dots \longrightarrow K^*(Z \cap B_{i-1} \cap A_i) \xrightarrow{\partial} K^*(Z) \longrightarrow K^*(Z \cap A_i) \oplus K^*(Z \cap B_{i-1}) \longrightarrow \dots$$

bleibt nach Tensorieren mit $\otimes_{\mathbb{Z}} M$ exakt, da M frei über \mathbb{Z} ist. Man kann sich jetzt leicht überlegen, daß folgendes Diagramm mit exakten Zeilen kommutiert:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & K^*(Z \cap B_{i-1} \cap A_i) \otimes M & \xrightarrow{\partial} & K^*(Z) \otimes M & \longrightarrow & (K^*(Z \cap A_i) \otimes M) \oplus (K^*(Z \cap B_{i-1}) \otimes M) \longrightarrow \\ & & \downarrow \varphi|_{Z \cap B_{i-1} \cap A_i} \cong & & \downarrow \varphi|_Z & & \downarrow \cong \varphi|_{Z \cap A_i} \oplus \varphi|_{Z \cap B_{i-1}} \\ \dots & \longrightarrow & K^*(\pi^{-1}(Z \cap B_{i-1} \cap A_i)) & \xrightarrow{\partial} & K^*(\pi^{-1}(Z)) & \longrightarrow & K^*(\pi^{-1}(Z \cap A_i)) \oplus K^*(\pi^{-1}(Z \cap B_{i-1})) \longrightarrow \end{array}$$

Nach dem Fünfer-Lemma ist somit $\varphi|_Z$ ein Isomorphismus von abelschen Gruppen. Da es sich aber um einen Homomorphismus von graduierten Ringen handelt, ist $\varphi|_Z$ sogar ein Isomorphismus von graduierten Ringen. \square

Die Bedeutung des Spaltungsprinzips für Operationen in K -Theorie liegt im folgenden Korollar:

Korollar 7.3.3. *Zwei Operationen, die auf Summen von Linienbündeln übereinstimmen, sind identisch.*

Wir wollen nun ganz spezielle Operationen, die sogenannten *Adams-Operationen*, auf $K(X)$ definieren. Dazu benötigen wir folgendes Hilfsmittel:

Definition 7.3.4. Für ein Vektorraumbündel E über X sei $[0, \Lambda^i(E)] \in K(X)$ die Klasse des i -fachen äußeren Produktes. Sei $K(X)[[t]]$ der formale Potenzreihenring über $K(X)$. Definiere

$$\lambda_t(E) := \sum_{i=0}^{\infty} t^i \cdot [0, \Lambda^i(E)] \in K(X)[[t]].$$

Aus der Beziehung $\Lambda^i(E \oplus F) = \sum_{k=0}^i \Lambda^k(E) \otimes \Lambda^{i-k}(F)$ für Vektorraumbündel E, F über X kann man leicht folgern, daß

$$\lambda_t(E) \cdot \lambda_t(F) = \lambda_t(E \oplus F)$$

gilt. Da $\lambda_t(E)$ an der Stelle $i = 0$ (t^0) den Koeffizienten $1 \in K(X)$ hat, ist $\lambda_t(E)$ eine Einheit in $K(X)[[t]]$, also ist

$$\lambda_t : Vect(X) \longrightarrow (K(X)[[t]])^*$$

ein Halbgruppenhomomorphismus von der kommutativen Halbgruppe $Vect(X)$ der Isomorphieklassen von Vektorraumbündeln über X in die Einheitengruppe $(K(X)[[t]])^*$ des Ringes $K(X)[[t]]$. Nach Bemerkung 3.7 induziert λ_t also in eindeutiger Weise einen (wieder mit λ_t bezeichneten) Gruppenhomomorphismus

$$\lambda_t : K(X) \longrightarrow (K(X)[[t]])^*.$$

Für $x \in K(X)$ ist dann

$$\lambda_t(x) = \sum_{i=0}^{\infty} t^i \cdot \lambda^i(x)$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $\lambda^i(x) \in K(X)$.

Aufgabe 7.3.5. Zeige, daß für jedes $x \in K(X)$ gilt: $\lambda^0(x) = 1$, $\lambda^1(x) = x$. Zeige, daß für $x, y \in K(X)$ gilt:

$$\lambda^i(x + y) = \sum_{k=0}^i \lambda^k(x) \cdot \lambda^{i-k}(y)$$

Definition 7.3.6 (Adams-Operationen).

Definiere für $x \in K(X)$

$$\psi_{-t}(x) := -t \cdot \frac{\lambda'_t(x)}{\lambda_t(x)} \in K(X)[[t]].$$

(Frage: Warum ist dieser Ausdruck wieder eine formale Potenzreihe?) Als formale Potenzreihe besitzt $\psi_{-t}(x)$ eine eindeutige Darstellung

$$\psi_{-t}(x) =: \sum_{k=1}^{\infty} \psi^k(x) \cdot (-t)^k.$$

Die Abbildung

$$\psi^k : K(X) \longrightarrow K(X)$$

ist, wie man sich leicht überlegt, für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Operation und heißt k -te Adams-Operation auf $K(X)$.

Lemma 7.3.7 (Eigenschaften der Adams-Operationen).

- (i) Ist $x = [0, L] \in K(X)$ ein Linienbündel, so gilt $\psi^k(x) = x^k$ für $k \in \mathbb{N}$.
- (ii) Die Abbildungen $\psi^k : K(X) \rightarrow K(X)$ sind Ringhomomorphismen.
- (iii) $\psi^l \circ \psi^k = \psi^{k \cdot l} = \psi^k \circ \psi^l$ für $k, l \in \mathbb{N}$.

BEWEIS:

Der Beweis ist eine einfache Übungsaufgabe. Bei (ii) und (iii) sollte man auf das Spaltungsprinzip (Korollar 7.3.3) zurückgreifen. \square

Lemma 7.3.8. Für $x \in K(X)$ besteht die folgende Relation zwischen λ^i und ψ^k :

$$\psi^k(x) - \lambda^1(x) \cdot \psi^{k-1}(x) + \dots + (-1)^{k-1} \lambda^{k-1}(x) \cdot \psi^1(x) + (-1)^k k \lambda^k(x) = 0$$

BEWEIS:

Aus Definition 7.3.6 $\lambda_t(x) \cdot \psi_{-t}(x) + t \lambda'_t(x) = 0$ folgt

$$\left(\sum_{i \geq 0} \lambda^i(x) \cdot t^i \right) \cdot \left(\sum_{i \geq 1} (-1)^i \psi^i(x) \cdot t^i \right) + t \sum_{k \geq 1} k \lambda^k(x) \cdot t^{k-1} = 0.$$

Daraus folgt

$$\sum_{k \geq 1} \left(\sum_{i+j=k} (-1)^j \lambda^i(x) \cdot \psi^j(x) + k \lambda^k(x) \right) \cdot t^k = 0.$$

Koeffizientenvergleich liefert die angegebene Formel. \square

Beispiel 7.3.9.

- Für $k = 1$ ergibt sich $\psi^1(x) + (-1)\lambda^1(x) = 0$ oder

$$\psi^1(x) = x.$$

- Für $k = 2$ ergibt sich $\psi^2(x) - \lambda^1(x) \cdot \psi^1(x) + 2\lambda^2(x) = 0$ oder

$$\psi^2(x) = x^2 - 2\lambda^2(x).$$

Lemma 7.3.10. Es ist $\widetilde{K}^0(S^{2n}) = \langle \beta_{2n} \rangle$ (siehe Beispiel 5.1.8). Es gilt für $k \in \mathbb{N}$

$$\psi^k(\beta_{2n}) = k^n \cdot \beta_{2n}.$$

BEWEIS:

Es ist $\beta_2 = [H, 1] = 1 - H$ und da ψ^k ein Ringhomomorphismus ist, gilt

$$\begin{aligned}\psi^k(\beta_2) &= \psi^k(1 - H) = 1 - \psi^k(H) = 1 - H^k = 1 - (\beta_2 + 1)^k \\ &= 1 - \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \beta_2^j \stackrel{\beta_2^2=0}{=} k \cdot \beta_2.\end{aligned}$$

Nach Korollar 5.1.8 ist $\beta_{2n} = \alpha_n(\beta_2 \otimes \dots \otimes \beta_2)$. Da ψ^k mit Produkten und induzierten Abbildungen verträglich ist, folgt

$$\begin{aligned}\psi^k(\beta_{2n}) &= \alpha_n(\psi^k(\beta_2) \otimes \dots \otimes \psi^k(\beta_2)) = \alpha_n(k \cdot \beta_2 \otimes \dots \otimes k \cdot \beta_2) \\ &= k^n \cdot \alpha_n(\beta_2 \otimes \dots \otimes \beta_2) = k^n \cdot \beta_{2n}.\end{aligned} \quad \square$$

7.4 H -Raum-Strukturen auf Sphären

Definition 7.4.1 (Reelle Divisionsalgebra).

Eine (i.a. nicht assoziative) \mathbb{R} -Algebra \mathcal{A} mit Einselement heißt *reelle Divisionsalgebra*, wenn jedes Element $0 \neq a \in \mathcal{A}$ in \mathcal{A} invertierbar ist. Daraus folgt insbesondere, daß die Multiplikation auf \mathcal{A} nullteilerfrei ist.

Bemerkung 7.4.2. Ist \mathcal{A} als \mathbb{R} -Vektorraum endlich dimensional, so ist \mathcal{A} genau dann eine reelle Divisionsalgebra, wenn die Multiplikation auf \mathcal{A} nullteilerfrei ist.

Satz 7.4.3. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

- (i) $n \in \{1, 2, 4, 8\}$.
- (ii) \mathbb{R}^n besitzt die Struktur einer reellen Divisionsalgebra.
- (iii) Das Tangentialbündel $TS^{n-1} := \{(x, v) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid \langle x, v \rangle = 0\}$ von S^{n-1} ist trivial, d.h.

$$TS^{n-1} \cong S^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1}$$

(als Vektorraumbündel). Wir nennen S^{n-1} dann parallelisierbar.

- (iv) S^{n-1} ist ein H -Raum.
- (v) Es gibt eine Abbildung $m : S^{n-1} \times S^{n-1}$ vom Bigrad $(1, 1)$.
- (vi) Entweder $n = 1$ oder: $n \geq 2$ gerade, und es gibt $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$ mit Hopf-Invariante 1.

(vii) Entweder $n = 1$ oder: $n \geq 2$ gerade, und es gibt $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$ mit ungerader Hopf-Invariante.

BEWEIS:

(i) \Rightarrow (ii): Betrachte $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ bzw. \mathbb{O} (siehe Beispiel 7.1.4).

(ii) \Rightarrow (iii): Ein m -dimensionales Vektorraumbündel $p : E \rightarrow X$ ist genau dann trivial, wenn es m (punktweise) linear unabhängige Schnitte $s_i : X \rightarrow E$ ($1 \leq i \leq m$) gibt.

Für $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$ existiert nach Voraussetzung $a^{-1} \in \mathbb{R}^n$. Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ die kanonische Orthonormalbasis von \mathbb{R}^n . Wir definieren für $1 \leq i \leq n$

$$\begin{aligned} s_i : S^{n-1} &\longrightarrow S^{n-1} \times \mathbb{R}^n, \\ x &\longmapsto (x, e_i \cdot (e_n^{-1} \cdot x)). \end{aligned}$$

Für jedes $x \in S^{n-1}$ bildet $\{s_n(x) = (x, x), s_1(x), \dots, s_n(x)\}$ eine Basis von $\{x\} \times \mathbb{R}^n$. Mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens erhält man stetige Schnitte

$$\tilde{s}_i : S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1} \times \mathbb{R}^n$$

mit $\tilde{s}_n(x) = (x, x)$ für $x \in S^{n-1}$, und $\{(x, x), \tilde{s}_1(x), \dots, \tilde{s}_{n-1}(x)\}$ bildet für jedes $x \in S^{n-1}$ eine Orthonormalbasis von $\{x\} \times \mathbb{R}^n$. Dann sind $\tilde{s}_i : S^{n-1} \rightarrow TS^{n-1}$ ($1 \leq i \leq n-1$) $n-1$ linear unabhängige Schnitte.

(iii) \Rightarrow (iv): Seien $s_1, \dots, s_{n-1} : S^{n-1} \rightarrow TS^{n-1}$ punktweise linear unabhängige und orthonormale Schnitte. Für $x \in S^{n-1}$ sei $S'(x)$ die orthogonale Matrix mit den Spaltenvektoren $s_1(x), \dots, s_{n-1}(x), x$. Setze

$$S(x) := S'(x) \cdot S'(e_n)^{-1}.$$

Wegen $\det(S'(x)) = \det(S'(e_n)) \in \{\pm 1\}$ für alle $x \in S^{n-1}$ definiert $x \mapsto S(x)$ eine stetige Abbildung

$$S : S^{n-1} \longrightarrow SO(n) \text{ mit } S(e_n) = E_n \text{ (Einheitsmatrix).}$$

Andererseits definiere

$$\begin{aligned} \pi : SO(n) &\longrightarrow S^{n-1}, \\ A &\longmapsto Ae_n. \end{aligned}$$

Es ist $\pi(S(x)) = S(x)e_n = S'(x) \cdot S'(e_n)^{-1}e_n = S'(x)e_n = x$. Nun definieren wir

$$\mu : S^{n-1} \times S^{n-1} \xrightarrow{S \times S} SO(n) \times SO(n) \xrightarrow{\pi} SO(n) \xrightarrow{\pi} S^{n-1}.$$

Wir fassen $e_n \in S^{n-1}$ als Basispunkt auf und erhalten

$$\mu(x, e_n) = \pi(S(x) \cdot S(e_n)) = \pi(S(x)) = x = \mu(e_n, x).$$

(iv) \Rightarrow (v): Beispiel 7.1.4(iii).

(v) \Rightarrow (vi): Satz 7.2.3 und Satz 7.2.6.

(vi) \Rightarrow (vii): trivial.

(vii) \Rightarrow (i): Sei n gerade und $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$ mit ungeradem $h(f)$. Wir betrachten die kurze exakte Sequenz zur Definition der Hopf-Invariante (siehe (7.2)):

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \tilde{K}^0(S^{2n}) & \xrightarrow{j^* \circ \alpha} & \tilde{K}^0(C_f) & \xrightarrow{i^*} & \tilde{K}^0(S^n) \longrightarrow 0 \\ & & \beta_{2n} \longmapsto & & v & & \\ & & & & & & \beta_n \\ & & & & u \longmapsto & & \\ & & & & u^2 = h(f) \cdot v & & \end{array}$$

Mit Hilfe von Lemma 7.3.10 rechnet man nach:

$$\begin{aligned} \psi^k(v) &= k^n \cdot v; \\ i^*(\psi^k(u)) &= i^*(k^{\frac{n}{2}} \cdot u). \end{aligned}$$

Damit folgt aus der Exaktheit obiger Sequenz

$$\psi^k(u) = q(k) \cdot v + k^{\frac{n}{2}} \cdot u \text{ mit } q(k) \in \mathbb{Z}. \quad (7.3)$$

Sublemma: $q(2) \equiv h(f) \pmod{2}$.

Nach Beispiel 7.3.9 gilt $\psi^2(x) = x^2 - 2\lambda^2(x)$ für $x \in K(X)$, also folgt

$$\begin{aligned} q(2) \cdot v + 2^{\frac{n}{2}} \cdot u &= \psi^2(u) = u^2 - 2\lambda^2(u) = h(f) \cdot v - 2\lambda^2(u). \\ \Rightarrow (q(2) - h(f)) \cdot v &= -2\lambda^2(u) - 2^{\frac{n}{2}} \cdot u \\ \Rightarrow q(2) - h(f) &\equiv 0 \pmod{2}. \end{aligned}$$

Setze im folgenden $r := \frac{n}{2} \in \mathbb{N}$. Aus $\psi^k(\psi^2(u)) = \psi^2(\psi^k(u))$ (Lemma 7.3.7(iii)) erhält man durch Nachrechnen unter Verwendung von (7.3)

$$\begin{aligned} k^n q(2) + 2^r q(k) &= q(k) 2^n + k^r q(2) \\ \Leftrightarrow k^r (k^r - 1) q(2) &= 2^r (2^r - 1) q(k). \end{aligned}$$

Nach obigem Sublemma ist $q(2)$ ungerade. Wählen wir k ungerade, so folgt aus der eindeutigen Primfaktorzerlegung: 2^r teilt $k^r - 1$ für alle ungeraden k oder

$$k^r \equiv 1 \pmod{2^r} \text{ für alle ungeraden } k. \quad (7.4)$$

Wegen $r = \frac{n}{2}$ ist zu zeigen: $r \in \{1, 2, 4\}$.

- Sei $r > 1$, $k = 3$. Dann folgt aus (7.4)

$$1 \equiv 3^r \equiv (2+1)^r \equiv 1 + 2r \pmod{4}.$$

Also ist $2r \equiv 0 \pmod{4}$ und somit r gerade.

- Sei $r > 1$, $k = 1 + 2^{\frac{r}{2}}$. Aus (7.4) folgt dann

$$1 \equiv (1 + 2^{\frac{r}{2}})^r \equiv 1 + r2^{\frac{r}{2}} \pmod{2^r},$$

also ist $2^{\frac{r}{2}}$ ein Teiler von r , und daraus folgt $r \in \{2, 4\}$. □

Literaturverzeichnis

- [Ati] **Atiyah, M.:** *K-Theory*, W.A. Benjamin Inc. 1967.
- [Bo] **Bott, R.:** *Lectures on $K(X)$* , W.A. Benjamin Inc. 1962.
- [Br] **Bredon, G.:** *Topology and Geometry*, vol. 139 of *Graduate Texts in Mathematics*, Springer 1993.
- [Br-Jä] **Bröcker, T. und Jänich, K.:** *Einführung in die Differentialtopologie*, Springer 1990.
- [Bu] **Bundschuh, H.:** *K-Theorie, Divisionsalgebren und Hopfinvariante*, Diplomarbeit, Mainz 1977.
- [He] **Heuser, H.:** *Analysis 2*, Teubner, 10. Aufl., 1993.
- [Hu] **Husemoller, D.:** *Fibre Bundles*, Springer 1975.
- [Ka] **Karoubi, M.:** *K-Theory. An Introduction*, Springer 1978.
- [Schu] **Schubert, H.:** *Topologie*, Teubner 1964.
- [St-Zi] **Stöcker, R. und Zieschang, H.:** *Algebraische Topologie*, Teubner 1994.
- [Wh] **Whitehead, G.W.:** *Elements of Homotopy Theory*, Springer 1978.

Index

(E_1, f, E_0) , 21
 (X, A) , 9
 $(\Lambda p_D^* E, \delta)$, 65
 $C = (C_*, c_*)$, 33
 C_f , 81
 $D(E)$, 65
 $E \hat{\otimes} E'$, 41
 E_x , 11
 $G_+(p)$, $G_-(p)$, 57
 H , 45
 $K(A)$, 24
 $K(X, A)$, 23
 $K(X, A)^c$, 34
 $K^*(X)$, 33
 $K^*(X, A)$, 33
 $K^n(X, A)$, 47
 $K^{-n}(X)$, 23
 $K^{-n}(X, A)$, 23
 $L^n(F)$, 55
 $L^n(p)$, 55
 $P(V)$, 72
 $S(E)$, 65
 S_{\pm}^2 , 49
 T_E , 66
 U_E , 74
 $\text{Vect}(X)$, 11, 24
 $[E_1, E_0]$, 23
 $[v]$, 72
 $\text{AUT}(E)$, 12
 $\text{Bild}(f)$, 13
 $\text{END}(E)$, 12
 $\Gamma(X, \text{Hom}(E, F))$, 12
 $\text{Grad}(f)$, 79
 \mathbb{H} , 80
 $\text{HOM}(E, F)$, 12

$\text{Hom}(E, F)$, 12
 $\text{ISO}(E, F)$, 12
 $\text{Kern}(f)$, 13
 \mathbb{O} , 80
 \bar{H} , 45
 β_2 , 46
 χ_E , 67
 \cup , 42
 \cup^c , 42
 δ^{-n} , 29
 $\hat{\beta}_2$, 46
 $\lambda^i(x)$, 90
 λ_E , 66
 λ_f , 82
 $\lambda_t(E)$, 90
 μ , 45
 $\partial^{(X,A)}$, 7
 ∂^{-n} , 31
 π_{\pm} , 50
 ψ^k , 90
 $\psi_{-t}(x)$, 90
 $\tilde{\mu}$, 46
 $h^n(X)$, 9
 ξ_V , 72
 $\{F, f\}$, 50
 c_n^* , 35
 f^* , 7
 f^*E , 12
 $h(f)$, 82
 $h^n(X, A)$, 7
 $h^n(f)$, 7

Abbildung
 von Vektorraumbündeln, 11
 Abbildungsgrad, 79
 Adams-Operationen, 90

- Ausschneidung, 8, 26
- Bigrad, 79
- Bott-Periodizität, 10, 45
- Brouwerscher Fixpunktsatz, 48
- Cayley-Zahlen, 80
- Cup-Produkt, 42
- Diagonalabbildung, 42
- Dimensionsaxiom, 8
- Diskbündel, 65
- Divisionsalgebra, 92
- Dupel, 23
- Euler-Klasse, 67, 76
- Exaktheit, 8, 28
- Faser, 11
- Fejér,
 - Satz von, 54
- Fourierkoeffizient, 54
- Fourierreihe, 54
- Funktorialität, 7
- Grothendieck-Konstruktion, 24
- H-Raum, 79
- Homologietheorie,
 - verallgemeinerte, 9
- Homotopie,
 - reguläre, 51
- Homotopieinvarianz, 8, 25
- Hopf-Invariante, 82
- Hopfbündel, 45
 - Relationen, 53
- Isomorphismus
 - von Tripeln, 21
 - von Vektorraumbündeln, 11
- K-Theorie, 23
 - von $\mathbb{C}P^n$, 78
- kanonisches Linienbündel, 45, 72
- Kettenkontraktion, 35
- Klebefunktion, 49
 - nahe, 54
 - polynomiale, 51
 - reguläre, 51
 - spezielle, 51
- Ko-Raum paar, 9
- KO-Theorie, 25
- Koeffizienten, 8
- Kofaserung, 9
- Kohomologietheorie,
 - 2-periodische, 10
 - reduzierte, 9
 - verallgemeinerte, 7
- Laplace-Operator, 35
- Laurentreihe,
 - Approximation durch, 54
 - endliche, 51
 - lineare, 51
 - polynomiale, 51
 - reguläre, 51
- Mayer-Vietoris-Sequenz, 31
- Natürlichkeit, 7
- nilpotenter Ring, 44
- nilpotentes Element, 44
- Operation in K-Theorie, 87, 89
- parallelisierbar, 92
- Periodizitätssatz, 45
- Produkt, 8
 - von Ko-Raum paaren, 23
- projektives Bündel, 72
- Pull-Back
 - universelle Eigenschaft, 12
 - von Vektorraumbündeln, 12
- Quaternionen, 80
- Randoperator, 7
 - der langen exakten Sequenz, 29
 - der Mayer-Vietoris-Sequenz, 31
- Schnitt, 12

- Fortsetzung, 14
- Spaltungsprinzip, 88
- Sphärenbündel, 65
- stereographische Projektion, 52

- Tensorprodukt,
 - äußeres, 41
- Thom-Homomorphismus, 66
- Thom-Isomorphismus, 68
- Thom-Klasse, 66, 74
- Tietzesches Erweiterungslemma, 14
- Triade,
 - excisive, 31
- Tripel, 21
 - elementares, 21
 - stabil isomorphe, 21

- Vektorraumbündel, 11
- Vektorraumbündel-Kettenkomplex
 - Definition, 33
 - exakte Sequenz, 34
 - homotoper, 34
 - Kettenhomomorphismus, 33
 - Tensorprodukt, 41
- Verkleben von Vektorraumbündeln,
 - 18

- wohlpunktierter Raum, 10

- Zerlegung der Eins, 14, 71

Clemens Bratzler und Wolfgang Lück
Institut für Mathematik und Informatik
Westfälische Wilhelms-Universität
Einsteinstr. 62
D-48149 Münster

bratzle@math.uni-muenster.de/ lueck@math.uni-muenster.de
<http://wwwmath.uni-muenster.de/math/u/lueck.html>

Version vom 8. Oktober 1998

